
بسم الله الرحمن الرحيم

ویژگی‌های تعمیم یافته میانگین پذیری از جبرهای برلینگ

مولف: نوید کفایی

سرشناسه : کفائی، نوید، ۱۳۶۳-
عنوان و نام پدیدآور : ویژگی‌های تعمیم‌یافته میانگین‌پذیری از جبرهای برلینگ/مولف نوید کفائی.
مشخصات نشر : تهران: نمای علم، ۱۴۰۴.
مشخصات ظاهری : ۹۰ص.
شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۴۳۵-۵۱۲-۶:
وضعیت فهرست نویسی : فیپا
یادداشت : واژه نامه.
یادداشت : کتابنامه: ص.۸۵ - ۸۸.
موضوع : جبر باناخ
Banach algebras
جبر برلینگ
Beurling algebra
مدول‌های باناخ (جبر)
Banach modules (Algebra)
توپولوژی
Topology
رده بندی کنگره : QA۳۲۶
رده بندی دیویی : ۵۱۵/۷۲۴
شماره کتابشناسی ملی : ۱۰۳۸۰۲۹۷
اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

عنوان: ویژگی‌های تعمیم‌یافته میانگین‌پذیری از جبرهای برلینگ
مولف: نوید کفایی
ناشر: انتشارات نمای علم
سال و نوبت چاپ: اول-۱۴۰۴
تیراژ: ۱۰۰ جلد
قیمت: ۴.۵۰۰.۰۰۰ ریال
شابک: ۶-۵۱۲-۴۳۵-۶۲۲-۹۷۸



نشانی: تهران، امیرآباد، خیابان گردآفرید، پلاک ۲، طبقه اول
تلفن: ۰۲۱۶۸۳۴۲۳۰۰

×××کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر محفوظ می باشد×××

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمات ۷
۱ .گروه‌ها و فضای توپولوژیک ۱۰
۲ .فضای اندازه و اندازه‌ها ۱۲
۳ .حلقه‌ها، میدان‌ها و فضای برداری ۱۴
۴ .جبر و جبر باناخ ۲۰
۵ .ترتیب جزئی و تور ۲۴
۶ .فضای L^1 و جبر باناخ تابعی ۲۵
فصل دوم: ایده‌آل‌های از هم‌بعد ۱ ..... ۳۷
۱ .تعاریف مرتبط با جبر باناخ و ایده‌آل‌ها ۳۹
۲ .تعاریف مرتبط با تقریب همانی(Approximate Identity) ۴۱
۳ .تعاریف مرتبط با نُرم و جبر باناخ نرم‌دار ۴۲
۴ .مفاهیم مرتبط با مشتق و انقباض‌پذیری تقریبی کران‌دار ۴۳
۵ .تعاریف مرتبط با جبر برلینگ و وزن‌ها ۴۷
۶ .گزاره‌ها و نتایج مربوط به ایده‌آل‌ها و تقریب همانی کران‌دار ۵۱
۷ .گزاره‌ها و نتایج مربوط به گروه‌های موضعاً فشرده و وزن‌ها ۵۵
۸ .تعاریف وزن‌ها و نگاشت‌های اندازه‌گیری روی گروه‌های فشرده ۵۹
فصل سوم: یک مشخصه‌سازی برای انقباض پذیری تقریبی کران‌دار ۶۱
۱ .تعاریف و مقدمات ۶۳
۲ .گزاره‌ها و قضایا ۶۳
فصل چهارم: جبرهای برلینگ بر شبه **SIN**-گروه‌ها ۷۱
عمل‌های طبیعی راست و چپ از $L^1(G,\omega)$ ۷۳
خود ریختی T را در $C.(G\times G,\frac{1}{\omega\times\omega})$ ۷۴
عمل ترکیب توابع در $C.(G\times G,\frac{1}{\omega\times\omega})$ ۷۵
دوگان عمل مدول از عمل ترکیب توابع در $M(G\times G,\omega\times\omega)$ ۷۹
فهرست منابع ۸۷
واژه‌نامه‌ی فارسی- انگلیسی ۹۱

فصل اول: مقدمات

فضای ریاضی، برخلاف آنچه در نگاه نخست ممکن است به نظر برسد، تنها شامل اعداد و محاسبات خشک نیست؛ بلکه بستر پیچیده‌ای است که مفاهیم مجرد را به گونه‌ای نمایش می‌دهد که بتوان رفتار اشیاء را در قالب رابطه و ساختار بررسی کرد. یکی از شاخه‌های بنیادی این علم، توپولوژی است که به بررسی خواص فضاها می‌پردازد و روابط میان نقاط، مجموعه‌ها و توابع را با تمرکز بر مفهوم نزدیکی و پیوستگی تحلیل می‌کند. توپولوژی، علیرغم ظاهر انتزاعی‌اش، در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات و حتی علوم کاربردی، از جمله فیزیک، مهندسی و علوم داده، کاربرد مستقیم دارد.

برای درک توپولوژی، باید ابتدا به مفهوم مجموعه‌های باز و بسته دقت کنیم. مجموعه‌های باز، که به نوعی قلب ساختار توپولوژیک را تشکیل می‌دهند، تصاویری از «مناطق بدون مرز مشخص» در فضای مورد نظر هستند. وقتی ما مجموعه‌ای را باز می‌نامیم، به این معناست که برای هر نقطه‌ای درون آن، می‌توان همسایگی کوچکی پیدا کرد که به طور کامل در همان مجموعه جای بگیرد. این ویژگی، پایه‌ای‌ترین سنگ بنا برای تعریف پیوستگی و سایر مفاهیم پیشرفته‌تر است.

مجموعه‌های بسته، که مکمل مجموعه‌های باز هستند، نقش اساسی در تحلیل محدودیت‌ها و مرزها دارند. بسته بودن مجموعه‌ها، نه تنها در بررسی نقاط حدی و تقاطع‌ها اهمیت دارد، بلکه در تعاریف فشردگی و فشردگی موضعی نیز بنیادین است. وقتی فضایی فشرده است، به نوعی همه چیز در آن «درون‌گرا» است و نمی‌تواند به بی‌نهایت گسترش یابد. فشردگی مفهومی است که به طور مستقیم با کاربردهای عملی در تحلیل رفتار سیستم‌ها و مدل‌سازی پدیده‌های واقعی مرتبط می‌شود.

پیوستگی توابع، یکی دیگر از مفاهیم کلیدی است. یک تابع زمانی پیوسته است که تغییرات کوچک در ورودی‌ها باعث تغییرات کوچک در خروجی‌ها شود. این ایده، پایه‌ای‌ترین شرط برای بررسی رفتار سیستم‌ها و تحلیل روندها در ریاضیات و علوم تجربی است. بدون این مفهوم، نمی‌توان پیش‌بینی‌های دقیقی درباره سیستم‌ها ارائه کرد.

گروه‌های توپولوژیک، ترکیبی از ساختار جبری و توپولوژیک، نمونه‌ای بارز از زیبایی انتزاعی ریاضیات هستند. در این گروه‌ها، هم ساختار گروهی برقرار است و هم خواص توپولوژیک رعایت

می‌شود، به طوری که ضرب و وارون‌پذیری نقاط در گروه با مفهوم پیوستگی هم‌زمان سازگار باشند. این ترکیب، در تحلیل تقارن‌ها و مدل‌سازی‌های پیچیده کاربرد فراوان دارد.

همسایگی‌ها، نقطه حدی‌ها و سایر مفاهیم مرتبط، ابزارهایی هستند که به ما کمک می‌کنند ساختار درونی فضا را بهتر درک کنیم. همسایگی، تصویری ذهنی از «محدوده نزدیک به یک نقطه» ارائه می‌دهد، در حالی که نقطه حدی، نوعی حضور نامرئی و حساس در مرزهای مجموعه‌ها را نمایش می‌دهد. این مفاهیم، به‌خصوص در مطالعه پیوستگی و فشردگی، اهمیت پیدا می‌کنند و پایه‌ای برای مفاهیم پیشرفته‌تر توپولوژی هستند.

با مرور این مفاهیم مقدماتی، خواننده آماده خواهد شد تا وارد بخش تعریف‌های دقیق و رسمی شود، جایی که مفاهیم باز، بسته، تابع پیوسته، گروه توپولوژیک، همسایگی، فشردگی، نقطه حدی و فشردگی موضعی به صورت کاملاً ریاضیاتی معرفی می‌شوند و پایه‌ای برای مطالعه پیشرفته‌تر توپولوژی فراهم می‌آورند. این مقدمه، علاوه بر فراهم کردن چارچوب مفهومی، قصد دارد ذهن خواننده را برای درک اهمیت و کاربرد هر تعریف آماده کند و نشان دهد که هر مفهوم چه جایگاه و نقشی در ساختار کلی فضای توپولوژیک دارد.

در سراسر این فصل $\mathbb{R}$ را مجموعه‌ی اعداد حقیقی و$\mathbb{Z}$ را مجموعه‌ی اعداد صحیح و $\mathbb{N}$ را مجموعه‌ی اعداد طبیعی و $\mathbb{C}$ را مجموعه‌ی اعداد مختلط در نظر می‌گیریم.

۱ .گروه‌ها و فضای توپولوژیک

تعریف۱-۰۱ : مجموعه‌ی ناتهیG را تحت عمل دوتایی $*$ یک گروه می‌نامیم هرگاه برای هر a,b,c در G داشته باشیم :

الف) $a*(b*c)=(a*b)*c$

ب) $\exists e\in G \;\; s.t \;\; \forall a\in G \;\; a*e=a=e*a$

پ) $\forall a\in G \;\; \exists a^{-1}\in G \; s.t \; a*a^{-1}=e=a^{-1}*a$

تعریف۱-۰۲ : مجموعه‌ی ناتهی X را در نظر بگیرید.$\tau\subseteq P(X)$. $P(X):=\{Y;\; Y\subseteq X\}$ را یک توپولوژی بر X می‌نامیم هرگاه

الف) $X,\emptyset\in\tau$

ب) برای هر خانواده‌ی $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ که $A_1,\dots,A_m\in\tau$ ، داشته باشیم $\bigcap_{i=1}^{m}A_i\in\tau$

پ) اگر D یک مجموعه‌ی اندیس دلخواه باشد آن‌گاه برای هر $\alpha\in D$ و$A_\alpha\in\tau$ داشته باشیم $\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\in\tau$

در این صورت (X,τ) یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۰۳ : فرض کنید که (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. زیرمجموعه ای از X مانند A باز است اگر متعلق به τ باشد. A در X بسته است هرگاه $A^C=X-A$ در τ باشد.

تعریف ۱-۰۴ : فرض کنید که (X,τ) و $(Y,\mathcal{P})$ دو فضای توپولوژیک باشند و f یک تابع از X بهY باشد.

f را یک تابع پیوسته می‌نامیم هرگاه تصویر وارون هر بازی تحت f درX باز باشد یعنی $\forall B\in\mathcal{P}\quad f^{-1}(B)\in\tau.$

تعریف ۱-۰۵ : فرض کنید که $(G,*)$ یک گروه و (G,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. گروه G یک گروه توپولوژیک است هرگاه دو نگاشت

$$*: G \times G \longrightarrow G \quad s.t \quad *(a,b) = a * b$$
$$.: G \longrightarrow G \quad s.t \quad .(a) = a^{-1}$$

پیوسته باشند.

تعریف ۱-۰۶ : فرض کنید که (X,τ) یک فضای توپولوژیک ، $a \in X$ و U زیرمجموعه‌ی X باشد. U را یک همسایگی a می‌نامیم هرگاه مجموعه‌ی بازی مانند $B \in \tau$ چنان وجود داشته باشد که $a \in B \subseteq U$.

تعریف ۱-۰۷ : فرض کنید که (X,τ) یک فضای توپولوژیک وA زیر مجموعه‌ی X باشد. A را فشرده می‌نامیم هرگاه برای هر پوشش باز A یک زیر پوشش متناهی وجود داشته باشد که A را بپوشاند.

تعریف ۱-۰۸ : فرض کنید که (X,τ) یک فضای توپولوژیک وA زیر مجموعه‌ی X باشد. بستار A را با علامت $\bar{A}$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\bar{A} = \cap B$$

که اشتراک بر مجموعه‌های بسته‌ی شامل A گرفته می‌شود.

تعریف ۱-۰۹ : فرض کنید که (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد و A زیرمجموعه‌ی X. $a \in A$ را یک نقطه‌ی حدی A می‌گوییم هرگاه هر همسایگی باز a مانند B ، A را درنقطه ای غیر از aقطع کند.

$$\forall B \in \tau \quad a \in B \implies B \cap A - \{a\} \neq \emptyset.$$

تعریف ۱-۱۰ : فرض کنید که (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. این فضا را فشرده‌ی موضعی می‌نامیم هرگاه حول هر نقطه از X یک همسایگی با بستار فشرده وجود داشته باشد.

۲ .فضای اندازه و اندازه‌ها

تعریف ۱-۱۱ : فرض کنید که X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. $\mathfrak{m}$ زیر مجموعه‌ی $P(X)$ را یک σ-جبر روی X می‌نامیم هرگاه

الف) $X, \emptyset \in \mathfrak{m}$

ب) اگر $A \in \mathfrak{m}$ آن‌گاه $A^c \in \mathfrak{m}$

پ) $\mathfrak{m}$ تحت اجتماع هر تعداد شمارا از اعضای خودش بسته باشد:

$$\forall i \in \mathbb{N} \ A_i \in \mathfrak{m} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{m}.$$

در این صورت $(X, \mathfrak{m})$ یک فضای اندازه پذیرنام دارد.

تعریف ۱-۱۲ : فرض کنید که $(X, \mathfrak{m})$ یک فضای اندازه پذیر باشد. در این صورت هر زیرمجموعه ای از X مانند B که $B \in \mathfrak{m}$ باشد یک مجموعه‌ی اندازه پذیر است.

تعریف۱-۱۳ : فرض کنید که $(X, \mathfrak{m})$ یک فضای اندازه پذیر باشد. در این صورت تابع مجموعه ای $\mu: \mathfrak{m} \longrightarrow [0, +\infty]$ را یک اندازه‌ی مثبت برσ-جبر $\mathfrak{m}$ می‌نامیم هرگاه

برای هر خانواده‌ی شمارا و دو به دو مجزا از اعضای $\mathfrak{m}$ مثل $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$، داشته باشیم:

الف) $\exists B \in \mathfrak{m} \ s.t \ \mu(B) < \infty$

ب) $\mu(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

در این حالت سه تایی $(X, \mathfrak{m}, \mu)$ یک فضای اندازه نام دارد.

تعریف ۱-۱۴ : فرض کنید که $(X, \mathfrak{m})$ یک فضای اندازه پذیر و (Y, τ) یک فضای توپولوژیک باشد و $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد که برای هر مجموعه‌ی بازی مانند V در Y تصویر وارون V تحت f یک مجموعه‌ی اندازه پذیر باشد. در این صورت f یک تابع اندازه پذیر نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱۵ : فرض کنید که G یک گروه توپولوژیک باشد که به عنوان یک فضای توپولوژی فشرده‌ی موضعی است. در این صورت G یک گروه فشرده‌ی موضعی است.

تعریف ۱-۱۶ : فرض کنید که $(X, \mathfrak{m})$ یک فضای اندازه پذیر باشد. $\mathfrak{m}$ را یک σ-جبر بورل X می‌نامیم هرگاه کوچکترین σ-جبری باشد که شامل تمام مجموعه‌های باز X باشد.

تعریف ۱-۱۷ : فرض کنید که $(X, \mathfrak{m})$ یک فضای اندازه پذیر و $\mathfrak{m}$ کوچکترین σ-جبر بر X شامل مجموعه‌های باز باشد. در این صورت هر زیرمجموعه ای از X مانند B که $B \in \mathfrak{m}$ یک مجموعه‌ی بورل اندازه پذیر نام دارد.

تعریف ۱-۱۸ : فرض کنید که $(X, \mathfrak{m})$ یک فضای اندازه پذیر با σ-جبر بورل $\mathfrak{m}$ باشد و فرض کنید که (Y, τ) یک فضای توپولوژیک و $f: X \longrightarrow Y$ یک تابع اندازه پذیر باشد. در این صورت f یک تابع بورل اندازه پذیر است.

تعریف ۱-۱۹ : فرض کنید که $(X, \mathfrak{m}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. در این صورت

μ منظم بیرونی است هرگاه برای هر $E \in \mathfrak{m}$

$$\mu(E) = \inf_{B \supseteq E, B \text{باز}} \mu(B)$$

μ منظم درونی است هرگاه برای هر $E \in \mathfrak{m}$

$$\mu(E) = \sup_{K \subseteq E, K \text{فشرده}} \mu(K)$$

و اندازه‌ی μ را منظم می‌نامیم هرگاه منظم بیرونی و منظم درونی باشد.

تعریف ۱-۲۰ : فرض کنید که $(G, \mathfrak{m}, \Theta)$ یک فضای اندازه با اندازه‌ی منظم Θ و G یک گروه توپولوژیک فشرده‌ی موضعی باشد. اکنون اگر

الف) برای هر زیرمجموعه‌ی باز G مانند A داریم $\Theta(A) > 0$.

ب) زیر مجموعه‌ی بازی مانند K از G چنان وجود داشته باشد که اندازه‌ی Θ بر آن متناهی باشد.

پ) برای هر زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی G مانند U اندازه‌ی U متناهی باشد.

ت) برای هر زیر مجموعه ای مانند B از G که $B \in \mathfrak{m}$ و برای هر عضو دلخواه مانند x از G داشته باشیم:

$$\theta(x.B) = \theta(B)$$

یعنی تحت انتقال چپ پایا باشد، آن‌گاه θ را اندازه‌ی هار چپ برای گروه G یا اندازه‌ی هار چپ روی $\mathfrak{m}$ می‌نامیم.

قضیه ۱-۱ :بر هر گروه فشرده‌ی موضعی یک اندازه هار چپ وجود دارد و یکتاست تا ضریب ثابت.

قضیه ۱-۲ :هر وزن همواره با یک وزن پیوسته معادل است.

۳ .حلقه‌ها، میدان‌ها و فضای برداری

تعریف۱-۲۱ : فرض کنید G یک گروه توپولوژیک فشرده‌ی موضعی با اندازه‌ی هار چپ λ باشد. تابع بورل اندازه پذیر ω را یک وزن می‌نامیم هرگاه

$$\omega: G \longrightarrow (\cdot, +\infty) \quad s.t$$

الف) $\forall a, b \in G \quad \omega(ab) \leq \omega(a)\omega(b)$

ب) اگر $K \subseteq G$ فشرده باشد، آن‌گاه،

$\exists m \in \mathbb{N} \; s.t \; \forall a \in K \; \omega(a) < m.$

مثال هایی از وزن :

$(G,*) = (\mathbb{R} - \{\cdot\},.) \quad f: G \longrightarrow (\cdot, +\infty) \quad s.t \quad f(x) = |x|$

$.f(x.y) = |x.y| \leq |x||y| = f(x)f(y)$

اگر A زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای از $\mathbb{R}\backslash\{\cdot\}$ باشد، آن‌گاه $A \subseteq \mathbb{R}\backslash\{\cdot\}$ و A به عنوان یک مجموعه بسته و کران‌دار است و چون $f(A) = |A|$ و $|A|$ کران‌دار است پس f نیز بر A کران‌دار است.

$(G,*) = (\mathbb{R}, +) \quad \omega: G \longrightarrow (\cdot, +\infty) \quad s.t \; \omega(x) = e^x$

$\omega(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \omega(x)\omega(y).$

$\omega: G \longrightarrow (\cdot, +\infty) \quad s.t \; \omega(a) = ۱ \quad \omega(ab) = ۱ = ۱ \times ۱ = \omega(a)\omega(b).$

تعریف ۱-۲۲ : دو وزن ω و λ را معادل می‌نامیم هرگاه دو عدد $M > ۰$ و $m > ۰$ چنان یافت شود که

$$m\omega(x) \leq \lambda(x) \leq M\omega(x) \ \ (x \in G).$$

اثبات قضیه‌ی زیر در مرجع [۷] آمده است.

تعریف ۱-۲۳ : فرض کنید که G یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد. در این صورت:

$$C_{..}(G) := \{f \text{ ; پیوسته} f: G \longrightarrow \mathbb{C}\ s.t\ suppf \text{ فشرده} \}\ \ ;\ \ suppf = \overline{\{x\ ;\ |f(x)| \neq ۰\}}$$

$$C_{.}(G) := \{f; \text{پیوسته} f: G \longrightarrow \mathbb{C}\ \ \forall \varepsilon > ۰\ \exists K \subseteq G\ \ \forall a \in K^{c}\ \ |f(a)| < \varepsilon \}$$

$$C_{.}(G, \omega) := \{f; \omega f \in C_{.}(G)\}$$

$$C_{.}(G, \tfrac{۱}{\omega}) := \{f;\ \ f/\omega \in C_{.}(G)\}$$

قضیه‌ی۱-۲ : هر وزن همواره با یک وزن پیوسته معادل است.

برهان : فرض کنید که μ یک تابع وزن بر گروه فشرده‌ی موضعی G باشد همسایگی متقارن فشرده‌ی C را از e اختیار می‌نماییم. و $f \in C_{..}(G)$ را اختیار می‌نماییم به طوری که $suppf \subset C$ و $\int_{G}^{\square} f = ۱$ باشد. مجموعه‌ی $M\ ]\ \sup_{x \in C} \mu(x) = M$ متناهی است زیرا μ کران دار موضعی است]. تعریف می‌کنیم $W = f * \mu$. در این صورت

$$M^{-۱}\mu(x) \leq W(x) \leq M\mu(x)$$

و در واقع

$$W(x) \leq \int_{G}^{\square} f(y)\mu(y^{-۱})\mu(x)dy \leq M\mu(x).$$

در حالی که از طرف دیگر

$$\mu(x) = \int_{G}^{\square} f(y)\mu(x)\, dy \leq \int_{G}^{\square} f(y)\mu(y^{-۱})\mu(y^{-۱}x)\, dy \leq MW(x).$$

به دست می‌آوریم

$$W(ab) \leq M\mu(ab) \leq M\mu(a)\mu(b) \leq MMW(a)MW(b) = M^{۳}W(a)W(b)$$

قرار می‌دهیم $\omega = M^{۳}W$ در این صورت ω یک تابع وزن پیوسته است. به دست می‌آید $M^{۲}\mu \leq \omega \leq M^{۴}\mu$. به این ترتیب برای وزن μ وزن پیوسته‌ای مانند ω وجود دارد به طوری که $\omega\mu$, با یکدیگر معادل باشند.

تعریف ۱-۲۴ : هر تابعی که بردش متناهی باشد یک تابع ساده است.

تعریف ۱-۲۵ : فرض کنید که $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد و

$s: X \longrightarrow [0, +\infty) \quad s.t \quad s(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$

یک تابع ساده‌ی اندازه پذیر باشد. انتگرال لبگ را بر زیر مجموعه ای از X مانند E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\int_E^{\square} s d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu(E \cap E_i)$.

قضیه‌ی ۱-۳ : هرگاه f تابع اندازه‌پذیر نامنفی باشد ، دنباله‌ی توابع ساده اندازه‌پذیر s_n چنان وجود دارند که برای هر n داریم $0 \leq s_n \leq f$.

تعریف۱-۲۶ : فرض کنید که $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. و $f: X \longrightarrow [0, +\infty)$ یک تابع اندازه پذیر و نا منفی و s تابع ساده اندازه پذیر باشد ، در این صورت انتگرال لبگ تابع f را بر مجموعه ای مانند E به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_E^{\square} f d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E^{\square} s d\mu .$$

$$f: X \longrightarrow \mathbb{C} \implies \int_E^{\square} f d\mu = \int_E^{\square} f_1^+ d\mu - \int_E^{\square} f_1^- d\mu + i \int_E^{\square} f_2^+ d\mu - i \int_E^{\square} f_2^- d\mu .$$

تعریف ۱-۲۷ : فرض کنید که R یک مجموعه‌ی ناتهی باشد R را تحت دو عمل جمع و ضرب $.: R \times R \longrightarrow R \, , +: R \times R \longrightarrow R$ یک حلقه می‌نامیم هرگاه $(R, +, .)$

$\forall a, b, c \in R$

س) $a + b \in R$

ش) $a + b = b + a$

پ) $a + (b + c) = (a + b) + c$

ت) $\exists 0 \in R \;\; s.t \;\; \forall a \in R \; a + 0 = a$

ث) $\forall a \in R \; \exists - a \in R \;\; s.t \;\; a + (-a) = 0$

ر) $a.b \in R$

ز) $(a.b).c = a.(b.c)$

ژ) $(a+b).c = a.c + b.c \; ; a.(b+c) = a.b + a.c$

تعریف ۱-۲۸ : فرض کنید که $(R,+,.)$ یک حلقه باشد. حلقه‌ی یک‌دار R را یک حلقه‌ی بخشی می‌نامیم هرگاه

$\forall a,b \in R \; \forall x \in R \;\; ax = b \implies x = a^{-1}b \;\; ; \;\; x, a^{-1} \in R$

یعنی هر عضو غیر صفر وارون ضربی داشته باشد.

تعریف ۱-۲۹ : فرض کنید که $(R,+,.)$ یک حلقه باشد این حلقه را جابه جایی (تعویض پذیر) می‌نامیم هرگاه

$\forall a,b \in R \;\; a.b = b.a$

تعریف ۱-۳۰ : هر حلقه‌ی تعویض پذیر بخشی یک میدان است.

تعریف ۱-۳۱ : فرض کنید که $(R,+,.)$ یک حلقه باشد منظور از عضو یکه‌ی حلقه‌ی R عضوی مانند $b \in R$ است که

$\forall a \in R \;\; a.b = a = b.a$

تعریف ۱-۳۲ : فرض کنید که K یک میدان باشد و V یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. V را یک فضای برداری روی میدان K می‌نامیم هرگاه دو تابع $+$ و $.$ (ضرب اسکالر) چنان وجود داشته باشند که

$+: V \times V \longrightarrow V$

$.: K \times V \longrightarrow V$

$\forall a,b,c \in V \;\; \forall \lambda, \beta \in \mathrm{K}$

الف) $(a+b)+c = a+(b+c)$

ب) $\exists \cdot \in V \;\; s.t \; \forall a \in V \;\; a + \cdot = a$

پ) $\forall a \in V \; \exists -a \in V \; s.t \; a + (-a) = \cdot$

$\forall a,b \in V \;\; a+b = b+a$

$\forall a \in V \quad ۱.a = a$

ر) $(\lambda + \beta)a = \lambda a + \beta a$

ز) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

ژ) $\lambda(\beta a) = (\lambda.\beta)a$

تعریف ۱-۳۳ : فرض کنید که V یک فضای برداری روی میدان K باشد. تابع $\|.\|: V \longrightarrow$ $[۰, +\infty)$ را یک نرم روی V می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in V$ و برای هر $\lambda \in K$، داشته باشیم:

$\|a\| = ۰ \iff a = ۰$

$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

$\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|.$

در این صورت زوج مرتب $(V, \|.\|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۱-۳۴ : فرض کنید که $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنباله باشد. این دنباله کوشی است هرگاه

$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists M \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N} \ m, n > M \implies \|a_n - a_m\| < \varepsilon.$

تعریف ۱-۳۵ : فرض کنید که $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنباله باشد. این دنباله در مجموعه ای مانند V همگرا است هرگاه:

$\exists a \in V \ s.t \ \forall \varepsilon > ۰ \ \exists M \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ n > M \implies \|a_n - a\| < \varepsilon.$

در هر فضای نرم‌دار هر دنباله‌ی همگرا کوشی است ولی هر دنباله‌ی کوشی لزوما همگرا نیست.

تعریف ۱-۳۶ : اگر در یک فضای نرم‌دار هر دنباله‌ی کوشی یک دنباله‌ی همگرا باشد آن‌گاه آن فضا یک فضای نرم‌دار کامل یا یک فضای باناخ است.

تعریف ۱-۳۷ : فرض کنید که V یک فضای برداری روی میدان K، و T یک تابعک از V به K باشد T را یک تابعک خطی می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in V$ و برای هر $\lambda \in K$

$\forall \, a, b \in V \quad T(\lambda a + b) = \lambda T(a) + T(b).$

تعریف ۱-۳۸ : فرض کنید که V یک فضای نرم‌دار روی میدان $\mathbb{C}$ و T یک تابع از V به $\mathbb{C}$ باشد T را یک تابعک کران‌دار می‌نامیم هرگاه

$$\exists M > ۰ \ \text{s.t} \ \forall a \in V \quad \|T\| = \sup_{\|a\| \leq ۱} \|T(a)\| < M.$$

تعریف ۱-۳۹ : فرض کنید که V یک فضای نرم‌دار روی میدان K باشد. مجموعه‌ی تمام تابعک های خطی و کران‌دار از V به K را با علامت V^* نشان می‌دهیم و آن را دوگان فضای برداری V می‌نامیم.

تعریف ۱-۴۰ : فرض کنید که X, Y دو فضای نرم‌دار باشند. مجموعه‌ی تمام تبدیل‌های خطی و کران‌دار از X به Y را که با علامت $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۴۱ : فرض کنید که V یک فضای برداری روی میدان K باشد. اگر Y زیر مجموعه‌ی V چنان باشد که Y با اعمال جمع و ضرب اسکالر V روی میدان K تشکیل یک فضای برداری دهد آن‌گاه Y زیر فضای V است. در این صورت می‌نویسیم $Y \leq V$.

تعریف ۱-۴۲ : فرض کنید که V یک فضای برداری روی میدان K باشد زیر مجموعه‌ی S از V را وابسته‌ی خطی می‌نامیم هرگاه بردارهایی مانند $\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n \in S$ ، ضرایب اسکالر مانند $c_۱, c_۲, \dots, c_n \in K$ چنان وجود داشته باشند که $i \in \{۱,۲,۳, \dots, n\}$ و

$$\exists i \in \{۱,۲,۳, \dots, n\} \ \ s.t \ \ c_i \neq ۰ \ \ \alpha_۱ c_۱ + \alpha_۲ c_۲ + \alpha_۳ c_۳ + \cdots + \alpha_n c_n = ۰$$

S مستقل خطی است هرگاه وابسته‌ی خطی نباشد یعنی S مستقل خطی است اگر و تنها اگر هر زیر مجموعه‌ی متناهی از S مستقل خطی باشد یعنی اگر وتنها اگر به ازای هر چند بردار متمایز $\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n \in S$ تساوی $\alpha_۱ c_۱ + \alpha_۲ c_۲ + \alpha_۳ c_۳ + \cdots + \alpha_n c_n = ۰$ ایجاب کند که

$$\forall i \in \{۱,۲,۳, \dots, n\} \ \ c_۱ = c_۲ = c_۳ = \cdots = c_n = ۰$$

و اکنون اگر S مستقل خطی باشد و S بتواند V را تولید کند (هر عضو V را بتوان به صورت ترکیب خطی از اعضای S نوشت) آن‌گاه S یک پایه برای فضای برداری V است.

تعریف ۱-۴۳ : فرض کنید که V یک فضای برداری روی میدان K باشد و S پایه‌ی V باشد و S توسط $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, \dots, \alpha_m$ تولید شود که $m \in \mathbb{N}$ یعنی:

$S =< \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m >$. در این صورت می‌گوییم این فضای برداری فضایی با بعد m است. و می‌نویسیم $dimV = m$ و اگر عددی در اعداد طبیعی یافت نشود که آن تعداد عضو S را تولید کند می‌نویسیم:

$dimV = \infty.$

تعریف ۱-۴۴ : فرض کنید که R یک حلقه باشد. B را زیرحلقه‌ی R می‌نامیم هرگاه B زیر مجموعه ای از R باشد و $(B, +_R, \cdot_R)$ یعنی B بتواند با دو عمل جمع و ضرب R تشکیل حلقه دهد.

٤ .جبر و جبر باناخ

تعریف ۱-۴۵ : فرض کنید که R یک حلقه باشد و I یک زیر حلقه از R باشد I را یک ایده‌آل دو طرفه یا یک ایده‌آل حلقه‌ی R می نامیم هرگاه

هم ایده‌آل راست باشد یعنی

$\forall r \in R \ \forall a \in I \quad ra \in I$

و هم ایده‌آل چپ باشد یعنی

$\forall r \in R \ \forall a \in I \quad ar \in I.$

تعریف ۱-۴۶ : فرض کنید که R, S دو حلقه باشند و $f: R \longrightarrow S$ یک نگاشت باشد f یک همریختی حلقه ای است هرگاه

$\forall a, b \in R$

الف) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

ب) $f(ab) = f(a)f(b)$،

در این صورت دامنه و برد نگاشت f همریخت هستند پس $R \simeq S$ است.

تعریف ۱-۴۷ : فرض کنید که R, S دو حلقه و نگاشت $f: R \longrightarrow S$ یک همریختی حلقه ای باشد هسته‌ی نگاشت f را با $Kerf$ نشان می‌دهیم و داریم:

$Kerf := \{a \in R \ \ s.t \ \ f(a) = 0_S\}.$

قضیه‌ی ۱-۴ : فرض کنید که R,S دو حلقه و نگاشت $f:R\longrightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت $Kerf$ یک ایده‌آل حلقه‌ی R است.

برهان : برای هر $a\in Kerf=U$ و برای هر $r\in R$

$$\forall a\in U\Longrightarrow f(a)=\cdot\,;\forall a\in K\ \ \forall r\in R\ \ f(a.r)=f(a)f(r)=\cdot\Longrightarrow a.r\in U$$
$$\forall a\in U\Longrightarrow f(a)=\cdot\,;\forall a\in K\ \ \forall r\in R\ \ f(r.a)=f(r)f(a)=\cdot\Longrightarrow r.a\in U$$
$$\Rightarrow U\trianglelefteq R$$

تعریف ۱-۴۸ : فرض کنید که G,D دو گروه و $H:G\longrightarrow D$ یک نگاشت باشد در این صورت H یک همریختی گروهی است هرگاه

$$\forall x,y\in G\ \ H(x*y)=H(x).H(y)$$

تعریف ۱-۴۹ : فرض کنید که G,D دو گروه و $H:G\longrightarrow D$ یک نگاشت باشد H همریختی گروهی باشد تعریف می‌کنیم:

$$KerH:=\{x\in G\quad s.t\quad H(x)=e_D\}.$$

تعریف ۱-۵۰ : فرض کنید که R,S دو حلقه باشند و $f:R\longrightarrow S$ یک همریختی حلقه ای باشد می‌گوییم f یک برووریختی است هرگاه علاوه بر همریختی بودن پوشا نیز باشد. و f یک تکریختی است هرگاه علاوه بر همریختی بودن یک به یک نیز باشد. و اگر f به طور همزمان هم همریختی باشد هم یک به یک هم پوشا آن‌گاه f یک یکریختی حلقه ای است. در این صورت دامنه و برد نگاشت f دارای یکریختی هستند پس $R\cong S$ است.

تعریف ۱-۵۱ : فرض کنید که R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت

$${}^{R}\!/_{I}:=\{a+I;a\in R\}$$ با دو تعریف $(a+I)+(b+I)=a+b+I$ و $(a+I).(b+I)=a.b+I$ یک حلقه است.

$$+:{}^{R}\!/_{I}\times{}^{R}\!/_{I}\longrightarrow{}^{R}\!/_{I}\quad +(a+I,b+I)=a+b+I$$
$$.:{}^{R}\!/_{I}\times{}^{R}\!/_{I}\longrightarrow{}^{R}\!/_{I}\quad .(a+I,b+I)=a.b+I$$

در این صورت $({}^{R}\!/_{I},+,.)$ یک حلقه است.

تعریف ۱-۵۲ : فرض کنید که V یک فضای برداری روی میدان K باشد اگر تابعی مانند Γ چنان وجود داشته باشد که

$\Gamma: V \times V \longrightarrow V \quad s.t \quad \forall a,b,c \in V$

الف) $\Gamma(a,b+c) = \Gamma(a,b) + \Gamma(a,c)$

ب) $\Gamma(a+b,c) = \Gamma(a,c) + \Gamma(b,c)$

پ) $\Gamma(\Gamma(a,b),c) = \Gamma\big(a,\Gamma(b,c)\big)$

$\forall \lambda \in K \quad , \quad \forall a,b \in V$

$\lambda\Gamma(a,b) = \Gamma(\lambda a,b) = \Gamma(a,\lambda b)$

با این فرض که $\Gamma(a,b) = a.b$ در این صورت

الف) $a.(b+c) = a.b + a.c$

ب) $(a+b).c = a.c + b.c$

پ) $(a.b).c = a.(b.c)$

و همچنین

$\lambda(a.b) = (\lambda a).b = a.(\lambda b)$

در این صورت $(V,+,.,\Gamma)$ یک جبر است.

تعریف ۱-۵۳ : فرض کنید که A,B دو جبر باشند می‌گوییم این دو جبر دارای یکریختی جبری هستند هرگاه نگاشتی مانند Ψ چنان وجود داشته باشد که

$\Psi: A \longrightarrow B \quad s.t \quad \forall x,y \in A \; \forall \lambda \in K$

الف) $\Psi(x+y) = \Psi(x) + \Psi(y)$

ب) $\Psi(\lambda x) = \lambda\Psi(x)$

پ) $\Psi(x.y) = \Psi(x)\Psi(y)$

وΨ یک به یک و پوشا باشد.

تعریف ۱-۵۴ : فرض کنید که A یک جبر باشد و $(A,\|.\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت A را یک جبر نرم‌دار می‌نامیم هرگاه

$$\forall a,b \in A \quad \|a.b\| \leq \|a\|\|b\|.$$

تعریف ۱-۵۵ : فرض کنید که $(A,\|.\|)$ یک جبر نرم‌دار باشد اگر نسبت به این نرم هر دنباله‌ی کوشی همگرا باشد آن‌گاه A یک جبر باناخ است.

تعریف ۱-۵۶ : فرض کنید که A,B,C سه فضای برداری باشند نگاشت $H: A \times B \longrightarrow C$ را دوخطی می‌نامیم هرگاه

$$H: A \times B \longrightarrow C$$

$$\forall x,y \in A \ \ \forall u,v \in B \ \ \forall \alpha,\beta \in K$$
$$H(\alpha x + y,u) = \alpha H(x,u) + H(y,u) \ ; \ H(x,\beta u + v) = \beta H(x,u) + H(x,v).$$

تعریف ۱-۵۷ : فرض کنید که A,B,C سه فضای نرم‌دار باشند نگاشت $H: A \times B \longrightarrow C$ را کران‌دار می‌نامیم هرگاه

$$\sup_{\|a\|\leq 1,\|b\|\leq 1} \|H(a,b)\| < \infty.$$

تعریف ۱-۵۸ : فرض کنید که A یک جبر باناخ باشد. منظور از یک A-مدول چپ باناخ یک زوج مرتب (X,T) است که در آن X یک فضای باناخ و $T: A \times X \longrightarrow X$ یک اپراتور دو خطی کران‌دار است که

$$\forall a,b \in A \quad \forall x \in X \quad T\big(a,T(b,x)\big) = T(ab,x).$$

تعریف ۱-۵۹ : فرض کنید که A یک جبر باناخ باشد. منظور از یک A-مدول راست باناخ یک زوج مرتب (X,S) است که در آن X یک فضای باناخ و $S: X \times A \longrightarrow X$ یک اپراتور دو خطی کران‌دار است که

$$\forall a,b \in A \quad \forall x \in X \quad S(S(x,a),b) = S(x,ab).$$

و اگر به طور همزمان X در هر دو تعریف بالا صدق کند آن‌گاه X یک $A-A$ دو مدول باناخ است.

تعریف ۱-۶۰ : فرض کنید که A یک جبر باناخ باشد. منظور از دوگان A-مدول راست باناخ $M = X^*$ است که X یک A-مدول راست باناخ باشد. همچنین منظور از دوگان A-مدول چپ باناخ $M = X^*$ است که X یک A-مدول چپ باناخ باشد. به همین ترتیب منظور از دوگان $A - A$ دو مدول باناخ

$M = X^*$ است که X یک $A - A$ دو مدول باناخ باشد. در هریک از حالت‌های بالا X پیش دوگان M است.

۵ .ترتیب جزئی و تور

تعریف ۱-۶۱ : فرض کنید که D یک مجموعه‌ی ناتهی باشد ، C زیر مجموعه‌ی حاصلضرب دکارتی $D \times D$ را یک ترتیب جزیی روی D می‌نامیم هرگاه

$C \subseteq D \times D$

$\forall\, x, y, z \in D$

الف) $\forall x \in D,\ (x, x) \in C$

ب) $if\ \ (x, y) \in C\ ;\ \ (y, x) \in C\ \Longrightarrow x = y$

پ) $if\ \ (x, y) \in C\ ;\ \ (y, z) \in C\ \ \Longrightarrow (x, z) \in C$

در این حالت می‌گوییم زوج مرتب (D, C) یک مجموعه‌ی جزئا مرتب است.

از این به بعد به جای $(x, y) \in C$ می‌نویسیم $x \leq y$ لذا

الف) $\forall x \in D\ \ x \leq x$

ب) $\forall x, y \in D\ if\ x \leq y\ ; y \leq x\ \Longrightarrow x = y$

پ) $\forall x, y, z \in D\ if\ x \leq y\ ; y \leq z\ \Longrightarrow x \leq z$

در این حالت زوج مرتب (D, C) را $(D, \leq)$ می‌نویسیم.

تعریف ۱-۶۲ : فرض کنید که $(D,\leq)$ یک مجموعه‌ی جزئا مرتب باشد. D را یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده می‌نامیم هرگاه

$\forall a,b \in D \;\; \exists c \in D \;\; s.t \;\; a \leq c \, , b \leq c.$

تعریف ۱-۶۳ : فرض کنید که (X,τ) یک فضای توپولوژیک و $(D,\leq)$ یک مجموعه‌ی جهت‌دار شده باشد. در این صورت هر تابع مانند $f: D \longrightarrow X$ یک تور است.

تعریف ۱-۶۴ : فرض کنید که $\{a_\alpha\}_{\alpha\in D}$ یک تور در فضای توپولوژی (X,τ) باشد. در این صورت این تور به نقطه ای مانند $b \in X$ همگرا است هرگاه برای هر همسایگی باز b مانند V مرتبه ای مانند β در D طوری وجود داشته باشد که برای هر $\alpha \in D$ که $\alpha \geq \beta$ تمامی a_α ها در V باشند.

۶ .فضای L^1 و جبر باناخ تابعی

تعریف ۱-۶۵ : فرض کنید که G یک گروه توپولوژیک فشرده‌ی موضعی با اندازه‌ی هار چپ λ باشد. در این صورت

$$L^1(G) := \{f \text{ ; اندازه‌پذیر} f: G \longrightarrow \mathbb{C} \;\; s.t \int_G^{\square} f d\lambda < \infty\}.$$

$L^1(G)$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر توابع یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است.

$$*: L^1(G) \times L^1(G) \longrightarrow L^1(G)$$

$$(f,g) \mapsto f * g \;\; ; \;\; (f*g)(x) = \int_G^{\square} f(t)g(t^{-1}x)dt.$$

$$\|.\|: L^1(G) \longrightarrow [0,+\infty) \;\; \|f\| = \int_G^{\square} |f|^1 d\lambda$$

با این تعاریف $L^1(G)$ یک جبر باناخ است.

تعریف ۱-۶۶ : فرض کنید که G یک گروه توپولوژیک فشرده‌ی موضعی با اندازه‌ی هار چپ λ باشد و فرض کنید که ω یک وزن بر G باشد. تعریف می‌کنیم :

$$L^1(G,\omega) := \left\{f \text{ ; اندازه‌پذیر} f: G \longrightarrow \mathbb{C} \;\; s.t \;\; f\omega \in L^1(G)\right\}.$$

اکنون نشان می‌دهیم که $L^1(G,\omega)$ یک جبر باناخ است :

$f,g \in L^1(G,\omega) \Rightarrow \omega f, \omega g \in L^1(G) \Rightarrow$

$\int_G |\omega(x)f(x)|\, d\lambda(x) < \infty \; ; \; \int_G |\omega(x)g(x)|\, d\lambda(x) < \infty$

$\int_G |\omega(x)f(x) + \omega(x)g(x)| d\lambda(x) = \int_G |\omega(x)f(x)|\, d\lambda(x) +$

$\int_G |\omega(x)g(x)|\, d\lambda(x) \Rightarrow f + g \in L^1(G,\omega)$

الف) $f + (g + h) = f + g + h = (f + g) + h$

ب) $f + k = f \quad k = 0 \; k(x) = 0 \; \forall x \in G \Rightarrow \forall f \in L^1(G,\omega)$

پ) $\forall f \in L^1(G,\omega) \; \exists -f : G \to \mathbb{C} \;\; x \mapsto -f(x) \;\; s.t$

$f + (-f) = 0 = k$

$\forall x \in G \, ; (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x) \Rightarrow f + g = g + f$

$H : G \to \mathbb{C} \;\; \forall x \in G \; H(x) = 1 \Rightarrow \quad \forall f \in L^1(G,\omega) \;\; 1.f = f$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

الف) $\big((\alpha+\beta)f\big)(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f + \beta f)(x) \Rightarrow (\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$

ب) $\big(\alpha(f+g)\big)(x) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f + \alpha g)(x) \Rightarrow \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$

پ) $\big(\alpha(\beta f)\big)(x) = (\alpha\beta f)(x) = \big((\alpha.\beta)f\big)(x) = (\alpha.\beta)f(x) \Rightarrow \alpha(\beta f) = (\alpha.\beta)f$

پس تا اینجا $L^1(G,\omega)$ یک فضای برداری است و

$$*: L^1(G,\omega) \times L^1(G,\omega) \to L^1(G,\omega)$$
$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy.$$

$\forall f,g \in L^1(G,\omega) \; ; \; \int_G \omega(y) |(f*g)(y)|\, dy =$

$\int_G \omega(y) \left| \int_G f(z) g(z^{-1}y)\, dz \right| dy =$

$\int_G \left| \int_G \omega(y) f(z) g(z^{-1}y)\, dz \right| dy \le \iint_G |\omega(y) f(z) g(z^{-1}y)|\, dz\, dy =$

$\int_G |f(z)| \int_G \omega(y) |g(z^{-1}y)|\, dy\, dz = \int_G |f(z)| \int_G \omega(zy) |g(zz^{-1}y)|\, dy\, dz =$

$\int_G |f(z)| \int_G \omega(zy) |g(y)|\, dy\, dz \le \int_G \omega(z)\, |f(z)| \int_G \omega(y)\, |g(y)|\, dy\, dz =$

$\int_G \omega(z)\, |f(z)|\, dz \int_G \omega(y)\, |g(y)|\, dy < \infty \Rightarrow$

$\omega(f*g) \in L^1(G) \Rightarrow f * g \in L^1(G,\omega)$

پس عمل پیچش خوشتعریف است.

الف)

$$\big(f*(g+h)\big)(x)=\int_G f(y)(g+h)(y^{-1}x)\,dy=\int_G[f(y)g(y^{-1}x)+$$
$$f(y)h(y^{-1}x)]=\int_G f(y)g(y^{-1}x)\,dy+$$
$$\int_G f(y)h(y^{-1}x)\,dy=(f*g)(x)+(f*h)(x)\implies f*(g+h)=f*g+f*h$$

ب)

$$\big((f+g)*h\big)(x)=\int_G (f+g)(y)h(y^{-1}x)\,dy$$
$$=\int_G[(f(y)$$
$$+(g)(y)]h(y^{-1}x)\,dy=\int_G[f(y)h(y^{-1}x)+g(y)h(y^{-1}x)]\,dy=$$
$$\int_G f(y)h(y^{-1}x)\,dy+\int_G g(y)h(y^{-1}x)\,dy=(f*h)(x)+(g*h)(x)$$
$$\implies (f+g)*h=f*h+g*h$$
$$\forall\alpha\in\mathbb{C}\quad\forall f,h\in L^1(G,\omega)$$

پ)

$$\big(\alpha(f*h)\big)(x)=\int_G \alpha f(y)h(y^{-1}x)\,dy$$
$$=\int_G(\alpha f)(y)h(y^{-1}x)\,dy=((\alpha f)*h)(x)=\int_G \alpha f(y)h(y^{-1}x)\,dy$$
$$=\int_G f(y)\alpha h(y^{-1}x)\,dy=\int_G f(y)(\alpha h)(y^{-1}x)\,dy=(f*\alpha h)(x)\implies\alpha(f*h)$$
$$=(\alpha f)*h)=f*\alpha h$$

ت)

$$\big((f*g)*h\big)(x)=\int_G(f*g)(z)h(z^{-1}x)\,dz=$$
$$\iint_G f(k)g(k^{-1}z)\,dk\,h(z^{-1}x)\,dz=$$

$$\iint_G^{\square} f(k)g(k^{-1}z)\,h(z^{-1}x)\,dk\,dz = \iint_G^{\square} f(k)g(k^{-1}z)\,h(z^{-1}x)\,dz\,dk =$$
$$\iint_G^{\square} f(k)g(z)h(k^{-1}z^{-1}x)\,dz\,dk = \int_G^{\square} f(k)\int_G^{\square} g(z)h(k^{-1}z^{-1}x)\,dz\,dk =$$
$$\int_G^{\square} f(k)\,dk\int_G^{\square} g(z)h(k^{-1}z^{-1}x)\,dz = \int_G^{\square} f(k)(g *$$
$$h)(k^{-1}x)\,dk = \big(f*(g*h)\big)(x) \Longrightarrow \forall x \in G$$
$$\big((f*g)*h\big)(x) = \big(f*(g*h)\big)(x) \implies (f*g)*h = f*(g*h)$$

$$\|.\|: L^1(G,\omega) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$\|f\|_\omega = \|f\omega\|_1 = \int_G^{\square} \omega(y)|f(y)|dy$$
$$\|f\|_\omega = 0 \implies \|f\omega\|_1 = 0 \implies \int_G^{\square} \omega(y)|f(y)|\,dy = 0 \ (\omega \neq 0) \implies f = 0$$
$$f = 0 \implies f(y) = 0\ \forall y \in G \implies \int_G^{\square} \omega(y)|f(y)|\,dy = 0 \implies \|f\omega\|_1 = 0 \implies$$
$$\|f\|_\omega = 0$$
$$\|f+g\|_\omega = \|\omega(f+g)\|_1 = \int_G^{\square} \omega(y)|(f+g)(y)|\,dy = \int_G^{\square} \omega(y)|(f(y)+$$
$$g(y)|dy \le \int_G^{\square} \omega(y)|f(y)|\,dy + \int_G^{\square} \omega(y)|g(y)|dy = \|\omega f\|_1 + \|\omega g\|_1 =$$
$$\|f\|_\omega + \|g\|_\omega \implies \|f+g\|_\omega \le \|f\|_\omega + \|g\|_\omega$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{C}\ \|\alpha f\|_\omega = \|\omega\alpha f\|_1 = \int_G^{\square} \omega(y)|\alpha f(y)|dy = |\alpha| \int_G^{\square} \omega(y)|f(y)|dy =$$
$$|\alpha|\|\omega f\|_1 = |\alpha|\|f\|_\omega \implies \|\alpha f\|_\omega = |\alpha|\|f\|_\omega .$$

پس این یک نرم روی $L^1(G,\omega)$ است. همچنین

$$\|f*g\|_\omega = \|\omega(f*g)\|_1 = \int_G^{\square} \omega(y)|(f*g)(y)|dy =$$
$$\int_G^{\square} \omega(y)\int_G^{\square} |f(z)g(z^{-1}y)\,dz|\,dy = \int_G^{\square} \left|\int_G^{\square} f(z)g(z^{-1}y)\,dz\right| dy =$$
$$\int_G^{\square} \left|\int_G^{\square} f(z)g(z^{-1}y)\,dz\right| dy = \int_G^{\square} |f(z)| \int_G^{\square} \omega(zy)|g(zz^{-1}y)|\,dy\,dz =$$
$$\int_G^{\square} |f(z)| \int_G^{\square} \omega(zy)|g(y)|\,dy\,dz \le \int_G^{\square} \omega(z)|f(z)| \int_G^{\square} \omega(y)|g(y)|\,dy\,dz =$$
$$\int_G^{\square} \omega(z)|f(z)|\,dz \int_G^{\square} \omega(y)|g(y)|\,dy = \|\omega f\|_1\|\omega g\|_1 = \|f\|_\omega\|g\|_\omega \Longrightarrow \forall f,g \in$$
$$L^1(G,\omega) \qquad \|f*g\|_\omega \le \|f\|_\omega\|g\|_\omega$$

پس $L^1(G,\omega)$ یک جبر نرم دار است. و اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی کوشی در $L^1(G,\omega)$ باشد آن‌گاه

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall m,n \in \mathbb{N}\ \ m,n > M \implies \left\|f_n - f_m\right\|_\omega < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall m,n \in \mathbb{N}\ m,n > M \implies \left\|\omega\left(f_n - f_m\right)\right\|_1 < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall m,n \in \mathbb{N}\ m,n > M \implies \left\|\omega f_n - \omega f_m\right\|_1 < \varepsilon$$

لذا دنباله‌ی $\{\omega f_n\}$ ها در $L^1(G)$ کوشی است و چون $L^1(G)$ یک فضای باناخ است بنابر این دنباله‌ی$\{\omega f_n\}$ ها در آن همگرا است یعنی تابعی چون $g \in L^1(G)$ چنان وجود دارد که

$$s.t\ \omega f = g \implies f = \frac{g}{\omega} \implies \omega f = \frac{\omega g}{\omega} = g \in L^1(G) \implies$$
$$\omega f \in L^1(G) \implies f \in L^1(G,\omega)$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n > M \implies \left\|\omega f_n - g\right\|_1 < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n > M \implies \left\|\omega f_n - \omega f\right\|_1 < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n > M \implies \left\|\omega(f_n - f)\right\|_1 < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n > M \implies \left\|f_n - f\right\|_\omega < \varepsilon$$

لذا هر دنباله‌ی کوشی در $\mathrm{L}^1(G,\omega)$ همگرا است پس $\mathrm{L}^1(G,\omega)$ یک جبر باناخ است.

همچنین $M(G)$ عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی اندازه‌های بورل مختلط منظم روی G.

تعریف ۱-۶۷ : فرض کنید که G یک گروه توپولوژیک فشرده‌ی موضعی با اندازه‌ی هار چپ λ باشد و فرض کنید که ω یک وزن بر G باشد. یک ضرب روی $\mathrm{L}^1(G,\omega)$ به نام پیچش را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$*: L^1(G,\omega) \times L^1(G,\omega) \longrightarrow L^1(G,\omega)$$
$$.(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$$
$$\|.\|: L^1(G,\omega) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$\|f\|_\omega = \|f\omega\|_1 = \int_G |f|\,d\lambda = \|f\omega\|_1 = \int_G |f|\,d\lambda.$$

قضیه‌ی ۱-۵ : فرض کنید که G یک گروه توپولوژیک فشرده‌ی موضعی با اندازه‌ی هار چپ λ باشد. اگر ω و γ دو وزن معادل بر G باشند آن‌گاه $\mathrm{L}^1(G,\omega)$ و $\mathrm{L}^1(G,\gamma)$ به عنوان دو جبر باناخ دارای یکریختی جبری هستند $\mathrm{L}^1(G,\omega) \cong \mathrm{L}^1(G,\gamma)$.

برهان : چون دو وزن ω و γ معادل هستند پس

$$\exists m, M > 0\ \forall x \in G\ \ m\omega(x) \le \gamma(x) \le M\omega(x)$$

نگاشت Ψ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$\Psi: L^{1}(G,\omega) \longrightarrow L^{1}(G,\gamma) \quad s.t \quad \Psi(f) = f$
$\Psi(f)(x) = f(x) \quad \forall x \in G$
$\forall f \in L^{1}(G,\omega) \Longrightarrow \omega f \in L^{1}(G) \Longrightarrow \int_G |\omega(x)f(x)|\, d\lambda(x) < \infty \Longrightarrow$
$\int_G \left|\frac{\gamma(x)}{M} f(x)\right| d\lambda(x) \leq \int_G |\omega(x)f(x)|\, d\lambda(x) < \infty \Longrightarrow \int_G \left|\frac{\gamma(x)}{M} f(x)\right| d\lambda(x) <$
$\infty \Longrightarrow \frac{1}{M}\int_G |\gamma(x)f(x)|\, d\lambda(x) < \infty \Longrightarrow \int_G |\gamma(x)f(x)|\, d\lambda(x) < \infty \Longrightarrow \gamma f \in$
$L^{1}(G) \Longrightarrow f \in L^{1}(G,\gamma)$

لذا Ψ خوشتعریف است.

$\forall f, g \in L^{1}(G,\omega)$
$\Psi(f+g)(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \Psi(f)(x) + \Psi(g)(x) =$
$\big(\Psi(f) + \Psi(g)\big)(x) \Longrightarrow \Psi(f+g) = \Psi(f) + \Psi(g)$
$\forall \alpha \in \mathbb{C}$
$\Psi(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha \Psi(f)(x) \Longrightarrow \Psi(\alpha f) = \alpha \Psi(f)$
$\Psi(f * g)(x) = (f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) d\lambda(y) =$
$\int_G \Psi(f)(y)\Psi(g)(y^{-1}x)\, d\lambda(y) = \big(\Psi(f) * \Psi(g)\big)(x) \Longrightarrow$
$\Psi(f * g) = \Psi(f) * \Psi(g)$
$\Psi(f) = \Psi(g) \Longrightarrow f = g \Longrightarrow \Psi: 1-1$
$\forall h \in L^{1}(G,\gamma) \Longrightarrow \gamma h \in L^{1}(\mathrm{G}) \Longrightarrow \int_G \gamma(y)|h(y)|\, \mathrm{d}\lambda(y) < \infty$
$\int_G m\omega(y)|h(y)| d\lambda(y) \leq \int_G \gamma(y)|h(y)|\, d\lambda(y) < \infty \Longrightarrow$
$m \int_G m\omega(y)|h(y)| d\lambda(y) < \infty$
$\int_G \omega(y)|h(y)|\, d\lambda(y) < \infty \Longrightarrow \omega h \in L^{1}(G) \Longrightarrow h \in L^{1}(G)$

پس Ψ پوشا است.

$\exists m, M > 0 \ \forall x \in G \quad m\omega(x) \leq \gamma(x) \leq M\omega(x)$
$\forall h \in L^{1}(G,\gamma) \Longrightarrow \gamma h \in L^{1}(G) \Longrightarrow \|h\|_{\gamma} = \|\gamma h\|_{1} = \int_G \gamma(y)|h(y)|\, d\lambda(y) \leq$
$\int_G M\omega(y)|h(y)|\, d\lambda(y) = M \int_G \omega(y)|h(y)|\, d\lambda(y) = M\|\omega h\|_{1} =$
$M\|h\|_{\omega} \Longrightarrow \|h\|_{\gamma} \leq M\|h\|_{\omega}$

$$\|h\|_\gamma = \|\gamma h\|_1 = \int_G^{\square} \gamma(y)|h(y)|d\lambda(y) \geq \int_G^{\square} m\omega(y)|h(y)|d\lambda(y) =$$
$$m\int_G^{\square} \omega(y)|h(y)|d\lambda(y) = m\|\omega h\|_1 = m\|h\|_\omega \implies m\|h\|_\omega \leq \|h\|_\gamma \implies \forall h \in$$
$$L^1(G,\gamma) \implies m\|h\|_\omega \leq \|h\|_\gamma \leq M\|h\|_\omega$$

پس دو نرم $\|.\|_\omega$،$\|.\|_\gamma$ با یکدیگر معادل هستند بنابر این دو فضای $L^1(G,\gamma)L^1(G,\omega)$, دارای یکریختی جبر های باناخ هستند $L^1(G,\omega) \cong L^1(G,\gamma)$.

تعریف ۱-۶۸ : فرض کنید که تابع بورل اندازه پذیر ω یک وزن برگروه فشرده‌ی موضعی G باشد. در این صورت

$$M(G,\omega) := \{\lambda \in M(G) \ ; \ \|\lambda\|_\omega < \infty\}.$$
$$\|.\| : M(G,\omega) \longrightarrow [0,+\infty) \quad s.t \quad \|\mu\|_\omega = \int_G^{\square} \omega(t)\, d|\mu|(t).$$

اکنون نشان می‌دهیم که این یک نرم است :

الف)

$$\|\mu\|_\omega = 0 \implies \int_G^{\square} \omega(t)\, d|\mu|(t) = 0 \ ; \ \omega \neq 0 \implies |\mu|\,(G) = 0 \implies |\mu| = 0 \implies$$
$$\mu = 0$$
$$\mu = 0 \implies |\mu| = 0 \implies \int_G^{\square} \omega(t)\, d|\mu|(t) = 0 \implies \|\mu\|_\omega = 0$$

ب)

$$\forall \mu, \lambda \in M(G,\omega)\ \|\mu+\lambda\|_\omega = \int_G^{\square} \omega(t)\, d|\mu+\lambda|(t)$$
$$\leq \int_G^{\square} \omega(t)\, d[|\mu|(t) + |\lambda|(t)]$$
$$\leq \int_G^{\square} \omega(t)\, d|\mu|(t) + \int_G^{\square} \omega(t)\, d|\lambda|(t) = \|\mu\|_\omega + \|\lambda\|_\omega$$
$$\implies \|\mu+\lambda\|_\omega \leq \|\mu\|_\omega + \|\lambda\|_\omega$$

پ)

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \;\; \|\alpha\mu\|_\omega = \int_G^{\square} \omega(t)\, d|\alpha\mu|(t) = \int_G^{\square} |\alpha|\omega(t)\, d|\mu|(t)$$
$$= |\alpha| \int_G^{\square} \omega(t)\, d|\mu|(t) = |\alpha|\|\mu\|_\omega \implies \|\alpha\mu\|_\omega = |\alpha|\|\mu\|_\omega$$

پس این یک نرم روی $M(G,\omega)$ است.

و علاوه بر این $M(G,\omega)$ دوگان $C.(G,\frac{1}{\omega})$ است [۱۹].

$$\|.\|: C.(G,\frac{1}{\omega}) \longrightarrow [0,+\infty[\quad s.t \;\; \|f\| = \sup_{x\in G} \left|\frac{f(x)}{\omega(x)}\right| \;\; \forall f \in C.(G,\frac{1}{\omega})$$

الف)

$$\|f\| = 0 \implies \sup_{x\in G} \left|\frac{f(x)}{\omega(x)}\right| = 0 \implies f(x) = 0 \; \forall x \in G \implies f = 0$$
$$; \; f = 0 \implies \forall x \in G \;\; f(x) = 0 \implies \sup_{x\in G} \left|\frac{f(x)}{\omega(x)}\right| = 0 \implies \|f\| = 0$$

ب)

$$\forall f, g \in C.(G,\frac{1}{\omega})$$
$$\|f+g\| = \sup_{x\in G} \left|\frac{f(x)+g(x)}{\omega(x)}\right| \le \sup_{x\in G} \left|\frac{f(x)}{\omega(x)}\right| + \sup_{x\in G} \left|\frac{g(x)}{\omega(x)}\right| = \|f\| + \|g\| \implies \|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$$

پ)

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \;\; \forall f \in C.(G,\omega) \;\; \|\alpha f\| = \sup_{x\in G} \left|\frac{\alpha f(x)}{\omega(x)}\right| = \sup_{x\in G} |\alpha| \left|\frac{f(x)}{\omega(x)}\right| =$$
$$|\alpha| \sup_{x\in G} \left|\frac{f(x)}{\omega(x)}\right| = |\alpha|\|f\| \implies \|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$$

پس این یک نرم روی $C.(G,\frac{1}{\omega})$ است.

اکنون sup اساسی را به صورت زیر تعریف می‌نماییم :

$$Esssup f := \inf_{\mu(\{x:\, |f(x)|>b\})=0} b$$
$$L^\infty(G) := \{f;\, f: G \longrightarrow \mathbb{C} \;\; s.t \;\; Esssup f < \infty\}$$ اندازه‌پذیر

$$L^{\infty}(G,\tfrac{1}{\omega}) := \{ f ; \tfrac{f}{\omega} \in L^{\infty}(G)\}$$

و همچنین $L^{\infty}(G,\frac{1}{\omega})$ دوگان $L^{1}(G,\omega)$ است [۱۹].

تعریف ۱-۶۹ : فرض کنید که A یک جبر باناخ و X یک $A-A$ باناخ دو مدول روی A باشد. مشتق عبارت است از نگاشت خطی مانند D به طوری که

$$D: A \longrightarrow X \quad \forall a,b \in A \;\; ; \;\; D(ab) = D(a)b + aD(b).$$
$$D(a)b = S(D(a),b) \qquad S: X \times A \longrightarrow X$$
$$aD(b) = T(a,D(b)) \qquad T: A \times X \longrightarrow X$$

که در آن ST , دو اپراتور خطی کران‌داراند که

$$\forall a,b \in A \;\; \forall x \in X \qquad T(a,T(b,x)) = T(ab,x)$$
$$\forall a,b \in A \;\; \forall x \in X \qquad S(S(x,a),b) = S(x,ab)$$
$$X^{*} = \{h; \text{کران‌دار} - \text{خطی } h \text{ ، } h: X \longrightarrow \mathbb{C}\}.$$

تعریف ۱-۷۰ : فرض کنید که A یک جبر باناخ باشد و X یک $A-A$ باناخ دو مدول روی A باشد در این صورت تابع مشتق $D: A \longrightarrow X$ را یک مشتق درونی تقریبی می‌نامیم هرگاه تور (x_i) در X وجود داشته باشد که

$$\forall a \in A \;\; D(a) = \lim_{i} ad_{x_i}(a).$$

که در آن $ad_{x_i}(a) = ax_i - x_i a$

تعریف۱- ۷۱ : جبر باناخ A را میانگین پذیر می‌نامیم هرگاه هر مشتق پیوسته از A به هر دوگان $A-A$ -دو مدول باناخ درونی باشد،

$$\forall D \;\; D: A \longrightarrow X^{*} \; \exists y \in X^{*} \;\; \forall a \in A \quad D(a) = ay - ya \;\; ; \; \forall X^{*}$$

تعریف ۱-۷۲ : جبر باناخ A را انقباض پذیر می‌نامیم هرگاه هر مشتق پیوسته از A به هر $A-A$ -دو مدول باناخ درونی باشد،

$$\forall D \;\; D: A \longrightarrow X \; \exists x \in X \;\; \forall a \in A \quad D(a) = ax - xa \;\; ; \; \forall X$$

تعریف ۱-۷۳ : فرض کنید که G یک گروه باشد ، در این صورت G را یک گروه میانگین پذیر می‌نامیم هرگاه نگاشت M چنان موجود باشد که

$M: L^{\infty^*}(G) \longrightarrow \mathbb{C} \qquad s.t \quad \|M\| = ۱ \quad M(f) = M(\overset{\cdot}{x}f)$

تعریف ۱-۷۴ : جبر باناخ A به طور تقریبی میانگین پذیر است. اگر برای هر $A - A$ دو مدول باناخی مانند X^* هر مشتق پیوسته $D: A \longrightarrow X^*$ تقریبا درونی باشد[۶]. این جبر باناخ A به طور تقریبی میانگین پذیر کران‌دار است اگر تور (x_i^*) را همواره بتوان طوری انتخاب نمود که هر $(ad_{x_i^*})$ نسبت به نرم روی $B(A, X^*)$ کران‌دار باشد.

تعریف ۱-۷۵ : جبر باناخ A به طور تقریبی انقباض پذیر کران‌دار است ، اگر شرایط بالا برای هر مشتق پیوسته در هر $A - A$ دو مدول باناخ X به دست آمده باشد.

در [۱۰] گرونباک ویژگی‌هایی از میانگین پذیری برای جبر برلینگ $L^۱(G, \omega)$ به دست آورده است همچنین در [۷] یک حالت از میانگین پذیر تقریبی و انقباض پذیر تقریبی برای جبرهای برلینگ به دست آمده است همچنین از نتیجه‌ی به دست آمده توسط گرانباک برای وزن ω و وزن Ω که در آن

$\Omega(x) = \omega(x)\omega(x^{-۱})$ برای هر x در G ، نقش بسیار مهمی ایفا می‌نماید. ما به Ω متقارن ساز ω می‌گوییم.

تعریف ۱-۷۶ : فرض کنید که ω یک وزن بر گروه توپولوژیک فشرده‌ی موضعی G باشد ω را یک وزن متقارن بر G می‌نامیم هرگاه

$\omega(x^{-۱}) = \omega(x) \quad \forall x \in G.$

- سوال طبیعی این است که آیا سه مفهوم میانگین پذیری و میانگین پذیری به طور تقریبی کران‌دار و انقباض پذیری به طور تقریبی کران‌دار برای جبر برلینگ $L^۱(G, \omega)$ منطبق می‌شوند. بر اساس نتایج این بحث برای یک وزن متقارن مانند $\boldsymbol{\omega}$ ، جبر برلینگ $\boldsymbol{L^۱(G, \omega)}$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار است اگر و تنها اگر میانگین پذیر باشد. از این رو در این مورد در اتصال

با نتیجه‌ی ذکر شده در بالا توسط گرانباک دسته بندی کاملی از انقباض پذیری به طور تقریبی کران‌دار داریم.

تعریف ۱-۷۷ : فرض کنید که G یک گروه باشد و H زیر مجموعه ای از G باشد که با عمل G تشکیل گروه دهد در این صورت H یک زیر گروه G است.

تعریف ۱-۷۸ : فرض کنید که G یک گروه باشد و N یک زیر گروه G باشد اکنون اگر

$\forall a \in G \ \forall b \in N \ aba^{-1} \in N.$

آن‌گاه N یک زیر گروه نرمال G است یعنی N در G نرمال است. یعنی $N \lhd G$.

تعریف ۱-۷۹ : فرض کنید که G یک گروه باشد اگر G دارای زیر گروه‌های نرمالی مانند $N_1, N_2, \dots, N_k$ باشد که

الف)

$\forall i \in \{1,2, \dots, k\}$

$N_i \cap < N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_{i-1} \cup N_{i+1} \cup \dots \cup N_k > = < e >$

ب)

$G = < N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_k >$

در این صورت G حاصلضرب مستقیم ضعیف داخلی از N_1 تا N_k است.

$G = \bigoplus_{i=1}^{k} N_i$

تعریف ۱-۸۰ : فرض کنید که G یک گروه باشد هر یکریختی گروهی مانند $f: G \longrightarrow G$ یک خودریختی است.

تعریف ۱-۸۱ : فرض کنید که G یک گروه و $f: G \longrightarrow G$ یک خودریختی باشد. در این صورت همسایگی V را نسبت به f پایا می‌نامیم هرگاه $f(V) \subseteq V$.

تعریف ۱-۸۲ : فرض کنید که G یک گروه باشد و $g \in G$ آن‌گاه Φ_g را یک خودریختی درونی می‌نامیم هرگاه

$\Phi_g: G \longrightarrow G \;\; s.t \;\; \Phi_g(x) = gxg^{-1}$.

به گروه توپولوژیک و فشرده‌ی موضعی G یک IN گروه می‌گوییم هرگاه یک همسایگی فشرده حول عضو همانی گروه G یعنی حول $e \in G$ طوری وجود داشته باشد که نسبت به هر خودریختی درونی روی G پایا باشد یعنی برای هر Φ_g ، $\Phi_g(V)$ زیر مجموعه ای از V باشد. G یک SIN گروه است هرگاه پایه ای از همسایگی‌های e از G طوری وجود داشته باشد که هر یک ازآن‌ها نسبت به خودریختی‌های درونی G پایا باشند. گروه G شبهSIN است اگر $L^1(G)$ دارای شبه-تقریب همانی مرکزی کران‌دار باشد. همچنین نشان می‌دهیم که اگر G شبهSIN گروه و ω یک وزن متقارن باشد به طوری که $\lim_{x\to\infty} \omega(x)\omega(x^{-1}) = \infty$ آن‌گاه $L^1(\mathrm{G},\omega)$ میانگین پذیر به طور تقریبی کران‌دار است اگر و تنها اگر انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار باشد. برای n در $\mathbb{N}$ فرض کنید که n $A^{(n)}$ امین دوگان پیوسته‌ی جبر باناخ A است. فضای $A^{(n)}$ به طور طبیعی یک دوگان باناخ A -دو مدول است. جبر A n-ضعیف میانگین پذیر است اگر هر مشتق پیوسته ای از A به $A^{(n)}$ درونی باشد [۳]. در [۴] مشخص شده است که اگر G گروه آبلی و ω یک وزن باشد و $inf\, \omega\left(\frac{x^n}{n}\right) = 0$ برای هر x در G آن‌گاه $\mathrm{L}^1(\mathrm{G},\omega)$ ۲-ضعیف میانگین پذیر است.

فصل دوم: ایده‌آل‌های از هم‌بعد ۱

در مطالعه‌ی جبرهای باناخ و جبرهای برلینگ، یکی از مسائل بنیادی شناخت ساختار ایده‌آل‌ها و روابط آن‌ها با تقریب همانی کران‌دار و انقباض‌پذیری تقریبی است. ایده‌آل‌های بسته، به ویژه آن‌هایی که از هم‌بعد یک هستند، نقش بسیار مهمی در تحلیل ویژگی‌های جبری و تحلیلی این جبرها ایفا می‌کنند. وقتی یک جبر باناخ A روی میدان K و ایده‌آل بسته I از A را در نظر می‌گیریم، حاصل‌قسمت A/I با نرم مشخص شده، خود یک جبر باناخ است و ابعاد آن به ما اطلاعات دقیقی درباره‌ی هم‌بعد بودن ایده‌آل می‌دهد. این مفاهیم پایه‌ای به ما امکان می‌دهند تا با استفاده از ابزارهای مشتق، توابع خطی و تقریب‌های همانی، ساختار جبر را بهتر درک کنیم و به مسائل پیچیده‌تری مانند انقباض‌پذیری تقریبی کران‌دار و تقریب همانی در ایده‌آل‌ها بپردازیم.

مطالعه‌ی این جبرها، علاوه بر اهمیت نظری، کاربردهای عملی گسترده‌ای در تحلیل توابع، نظریه گروه‌ها و جبرهای عملکردی دارد. برای مثال، در جبرهای برلینگ $L^1(G,\Omega)$ و $L^1(G,\omega)$ که بر گروه‌های محلی فشرده تعریف شده‌اند، میانگین‌پذیری و وجود تقریب همانی کران‌دار، معادل با برخی شرایط انقباض‌پذیری است که این امر ارتباط مستقیم با مطالعه‌ی ایده‌آل‌های هم‌بعد یک دارد. این امر نشان می‌دهد که مطالعه‌ی ایده‌آل‌ها و تقریب‌های همانی نه تنها یک مسئله‌ی جبری محض است، بلکه نقش کلیدی در تحلیل ویژگی‌های تابعی و همگرایی دنباله‌ها و مشتق‌ها دارد. بررسی دقیق ویژگی‌های تقریب همانی، شامل تقریب همانی چپ، راست و دوطرفه، و استفاده از توسعه‌های جبری مانند توسیع تابعک φ به Ψ و تحلیل کران‌داری تورهای مشتق داخلی، نشان می‌دهد که هر ایده‌آل بسته از هم‌بعد یک، دارای تقریب همانی کران‌دار است. این نتایج بنیادی، مسیر تحلیل مشتق‌های پیوسته و ساختار جبر باناخ انقباض‌پذیر را هموار می‌کند و به درک بهتر وابستگی میان ایده‌آل‌ها، تقریب‌های همانی و مشتق‌ها کمک می‌کند.

علاوه بر این، بررسی معادل بودن شرایط مختلف برای جبرهای برلینگ و ارتباط آن با میانگین‌پذیری گروه، نشان می‌دهد که ابزارهای تحلیل جبری و تقریب‌های همانی، علاوه بر کاربردهای نظری، می‌توانند به حل مسائل پیچیده در نظریه گروه‌ها و جبرهای عملکردی نیز کمک کنند. مطالعه‌ی این مسائل به ما امکان می‌دهد تا مفاهیم انتزاعی مانند انقباض‌پذیری تقریبی کران‌دار و تقریب همانی در ایده‌آل‌ها را به شکلی ملموس و کاربردی در تحلیل جبرها و

عملکردهای تابعی به کار گیریم و چارچوبی منسجم برای تحلیل دنباله‌های کوشی و مشتق‌های پیوسته فراهم آوریم.

در ادامه‌ی این مطالعه، نشان داده می‌شود که با استفاده از ابزارهای فوق، تقریب همانی کران‌دار برای ایده‌آل‌های بسته از هم‌بعد یک به طور دقیق قابل ساخت است و این نتایج به عنوان پایه‌ای برای تحلیل جبرهای برلینگ و بررسی میانگین‌پذیری گروه‌های محلی فشرده، اهمیت بنیادی دارند. این تحلیل‌ها، علاوه بر جنبه‌ی نظری، چارچوبی کاربردی برای مطالعه‌ی جبرهای باناخ و برلینگ در زمینه‌های مختلف ریاضی فراهم می‌آورد و درک عمیق‌تری از رفتار توابع و ساختار ایده‌آل‌ها ارائه می‌کند.

۱ .تعاریف مرتبط با جبر باناخ و ایده‌آل‌ها

تعریف ۲-۰۱ : فرض کنید که A یک جبر باناخ روی میدان K باشد و فرض کنید که I یک ایده‌آل بسته‌ای از A باشد. در این صورت A/I یک جبر باناخ است و اگر بعد A/I به عنوان یک فضای برداری برابر عددی طبیعی مانند m باشد آن‌گاه I از هم‌بعد m است. در این صورت می‌نویسیم،

$$\dim_K A/I = m \implies \operatorname{codim}_K I = m \quad (m \in \mathbb{N})$$

A/I با نرم و عمل‌های زیر یک جبر باناخ است :

$$\|.\|_{\frac{A}{I}}: A/I \longrightarrow [0,+\infty) \;\; s.t \quad \|a+I\|_{\frac{A}{I}} = \inf_{x\in I}\|a+x\|_A$$
$$+: A/I \times A/I \longrightarrow A/I \quad s.t \quad (a+I)+(b+I) = a+b+I$$
$$.: A/I \times A/I \longrightarrow A/I \quad s.t \quad (a+I)(b+I) = ab+I$$
$$.: \mathbb{C} \times A/I \longrightarrow A/I \quad s.t \quad \beta(a+I) = \beta a+I$$

اکنون نشان می‌دهیم که $\|a+I\|_{\frac{A}{I}} = \inf_{x\in I}\|a+x\|_A$ یک نرم است.

حال فرض کنید که $a+I = 0_{A/I}$ در این صورت

$$\boldsymbol{a+I = 0_{A/I} = I \implies \exists x \in I \;\; x = -a \implies \|a+I\| = \lim_{x\in I}\|a+x\| = 0}$$

بر عکس فرض کنید که $\|a+I\|=0$ لذا دنباله ای مانند (u_n) در I وجود دارد به طوری که $\|a+u_n\|\to 0$ وقتی که $n\to\infty$ لذا $-u_n\to a\in A$ وچون I بسته است پس $a\in I$ و در نتیجه $a+I=0_{A/I}$

$$\|\alpha(a+I)\|=\|\alpha a+I\|=\inf_{x\in I}\|\alpha a+x\|$$
$$=\inf_{u\in I}\|\alpha a+\alpha u\|=|\alpha|\inf_{u\in I}\|a+u\|=|\alpha|\|a+I\|$$
$$\forall a,b\in A$$
$$\|a+I+b+I\|=\inf_{x\in I}\|a+b+x\|=\inf_{x,y\in I}\|a+b+x+y\|$$
$$\leq\inf_{x,y\in I}(\|a+x\|+\|b+y\|)=\|a+I\|+\|b+I\|$$

بنابر این تا اینجا این یک نرم روی A/I است.

$$\|(a+I)(b+I)\|=\|ab+I\|=\inf_{x,y\in I}\|ab+I\|=\inf_{x,y\in I}\|ab+ay+xb+xy\|=$$
$$\inf_{x,y\in I}\|(a+x)(b+y)\|\leq\inf_{x,y\in I}\|a+x\|\|b+y\|=\|a+I\|\|b+I\|$$

پس A/I با این نرم یک جبر نرم‌دار است. فرض کنید که دنباله‌ی a_n+I کوشی باشد در A/I

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n\geq N\implies\|(a_n+I)-(a_m+I)\|<\varepsilon\implies\|a_n-a_m+I\|$$
$$<\varepsilon\Rightarrow\inf_{x\in I}\|a_n-a_m+x\|<\varepsilon\implies\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n\geq N$$
$$\Rightarrow\inf_{x,y\in I}\|(a_n+x)-(a_m+y)\|_A<\varepsilon$$

در این صورت این دنباله در A کوشی است و چون A یک فضای باناخ است لذا این دنباله در A همگرا است،

$$\exists b\in A\ \ s.t\ \ \forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}\ \forall n>M\implies\inf_{x\in I}\|b-(a_n+x)\|_A<\varepsilon$$

$$b=\lim_{n\to\infty}(a_n+I)=\lim_{n\to\infty}(a_n+x_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_n+x_n)\ ;\ x_n\in I\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\left\|b+I-\sum_{k=1}^{n}(a_n+I)\right\|_{\frac{A}{I}}=\left\|b-\sum_{k=1}^{n}a_n+I\right\|_{\frac{A}{I}}=\inf_{x\in I}\ \left\|b-\sum_{k=1}^{n}a_n+x\right\|_A\leq$$
$$\left\|b-\sum_{k=1}^{n}a_n-\sum_{k=1}^{n}x_n\right\|_A\Rightarrow b-\sum_{k=1}^{n}(a_n+x_n)\to 0\implies\exists b+I\in$$
$$A/I\ \ s.t\ \forall\varepsilon>0\ \exists M\in\mathbb{N}\ \ \forall m,n>M\ \ \implies\ \|(a_n+I)-(b+I)\|<\varepsilon$$

لذا هر دنباله‌ی کوشی در A/I همگرا است پس A/I یک جبر باناخ است.

برای شناخت جبر باناخ انقباض پذیر کران‌دار باید یک تقریب همانی کران‌دار را شناخت[۲]. می‌دانیم ایده‌آل بسته مکمل شده از یک جبر ممکن است دارای تقریب همانی کران‌دار نباشد [۷]. این همچنان یک سول باز است که ایده‌آل های بسته از هم‌بعد متناهی از یک جبر تقریب همانی کران‌دار است یا خیر [۱۷]. اما اگر ایده‌آل از هم‌بعد ۱ باشد متعاقب آن ما نتیجه‌ی مشخصی با مطالعه‌ی میانگین پذیرتقریبی از جبرهای برلینگ خواهیم داشت.

تعریف ۲-۰۲ : فرض کنید که $\boldsymbol{A}$ یک جبر و $\boldsymbol{I}$ ایده‌آلی از $\boldsymbol{A}$ باشد. اگر ایده‌آلی مانند $\boldsymbol{J}$ از $\boldsymbol{A}$ وجود داشته باشد به طوری که $\boldsymbol{A = I \oplus J}$ آن‌گاه می‌گوییم $\boldsymbol{I, J}$ مکمل شده‌اند.

۲ .تعاریف مرتبط با تقریب همانی(Approximate Identity)

تعریف ۲-۰۳ : فرض کنید که $\boldsymbol{A}$ یک جبر نرم‌دار باشد، تقریب همانی چپ برای $\boldsymbol{A}$ یک تور مانند $\boldsymbol{v_\alpha}$ است که

$$\forall \boldsymbol{x \in A} \implies \boldsymbol{v_\alpha x \to x}.$$

تعریف ۲-۰۴ : فرض کنید که $\boldsymbol{A}$ یک جبر نرم‌دار باشد، تقریب همانی راست برای $\boldsymbol{A}$ یک تور مانند $\boldsymbol{v_\alpha}$ است که

$$\forall \boldsymbol{x \in A} \implies \boldsymbol{x v_\alpha \to x}.$$

تعریف ۲-۰۵ : فرض کنید که $\boldsymbol{A}$ یک جبر نرم‌دار باشد، تقریب همانی دو طرفه برای $\boldsymbol{A}$ یک تور مانند $\boldsymbol{v_\alpha}$ است که

$$\forall \boldsymbol{x \in A} \implies \boldsymbol{v_\alpha x \to x} \;\; ; \;\; \boldsymbol{x v_\alpha \to x}.$$

قضیه‌ی ۲-۱ : فرض کنید که $\boldsymbol{A}$ یک جبر باناخ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار باشد. اگر $\boldsymbol{I}$ یک ایده‌آل بسته $\boldsymbol{A}$ و از هم‌بعد ۱ باشد ، آنگاه $\boldsymbol{I}$ دارای تقریب همانی کران‌دار است.

۳ .تعاریف مرتبط با نُرم و جبر باناخ نرم‌دار

برهان : بنابر [**۲ قضیه‌ی ۳.۳**] A یک تقریب همانی کران‌دار مانند (e_i) دارد و از این که I یک ایده‌آل بسته از هم‌بعد ۱ است. I یک ایده‌آل ماکسیمال از A است و بنابر قضیه ای یک تابعک خطی ضربی مانند φ بر A موجود است به طوری که $I = Ker\varphi$

$$\varphi: A \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \ \forall x, y \in A$$

الف) $$\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$$

ب) $$\varphi(x.y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

فرض کنید که $A^{\#} = A \oplus \mathbb{C}e$ از A یک‌دار شده است و e عضو همانی $A \oplus \mathbb{C}$ است.

$$+: A \oplus \mathbb{C}e \times A \oplus \mathbb{C}e \longrightarrow A \oplus \mathbb{C}e \quad s.t \quad a + \lambda e + b + \mu e = a + b + (\lambda + \mu)e$$
$$.: \mathbb{C} \times A \oplus \mathbb{C}e \longrightarrow A \oplus \mathbb{C}e \quad s.t \quad \alpha(a + \lambda e) = \alpha a + (\alpha\lambda)e$$
$$.: A \oplus \mathbb{C}e \times A \oplus \mathbb{C}e \longrightarrow A \oplus \mathbb{C}e \quad s.t \quad (a + \lambda e)(b + \mu e) = ab + \mu a + \lambda b + (\lambda\mu)e$$
$$\|.\|_{A\oplus\mathbb{C}e}: A \oplus \mathbb{C}e \longrightarrow [0, +\infty) \quad s.t \quad \|a + \lambda e\| = \|a\|_A + |\lambda|$$
$$e \in A \oplus \mathbb{C} \quad \mathbf{e} = (0,1) \ 0 \in \mathbf{A} \ ; \ 1 \in \mathbb{C}$$

ما می‌توانیم که φ را به Ψ توسیع دهیم :

$$\Psi: A \oplus \mathbb{C}e \longrightarrow \mathbb{C} \quad s.t \quad \Psi(a + \lambda e) = \varphi(a) + \lambda$$
$$\forall a + \lambda e \in A \oplus \mathbb{C}e \qquad \forall a \in A \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

که φ نیز یک تابعک خطی ضربی است زیرا Ψ خطی ضربی فرض شده است. در واقع

$$\Psi[z(a + \lambda e) + (b + \mu e)] = \Psi[za + z\lambda e + b + \mu e] = \Psi[za + b + (z\lambda + \mu)e] = \varphi(za + b) + z\lambda + \mu = \varphi(za) + \varphi(b) + z\lambda + \mu = z\varphi(a) + \varphi(b) + z\lambda + \mu = z(\varphi(a) + \lambda) + \varphi(b) + \mu = z\Psi[a + \lambda e] + \Psi[b + \mu e]$$

از طرفی دیگر Ψ ضرب را به ضرب می‌برد.

$$\Psi[(a + \lambda e)(b + \mu e)] = \Psi[ab + \lambda b + \mu a + (\lambda\mu)e] = \varphi(ab + \lambda b + \mu a) + \lambda\mu = \varphi(a)\varphi(b) + \lambda\varphi(b) + \mu\varphi(a) + \lambda\mu = (\varphi(a) + \lambda)(\varphi(b) + \mu) = \Psi[a + \lambda e].\Psi[b + \mu e]$$
$$\forall z \in \mathbb{C} \ \forall (a + \lambda e), (b + \mu e) \in A \oplus \mathbb{C}e$$

با فرض این که

$$J = Ker\Psi = \{a + \lambda e \ ; \ \Psi(a + \lambda e) = 0\} = \{a + \lambda e \ ; \ \varphi(a) + \lambda = 0\}$$

J به عنوان زیر فضایی از $A \oplus \mathbb{C}e$ از هم‌بعد ۱ است. در واقع $A \oplus \mathbb{C}e = J \oplus \mathbb{C}e$ و $J \oplus \mathbb{C}e$ با $J^{\#}$ یکریخت است یعنی $J^{\#} \cong J \oplus \mathbb{C}e$.

٤ .مفاهیم مرتبط با مشتق و انقباض‌پذیری تقریبی کران‌دار

اکنون $A^{\#}$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار است پس D مشتق است.

$\frac{A}{I} =< x + I >= \{\alpha x + I\,;\ \alpha \in \mathbb{C}\}\ a + I = \beta x + I \implies a - \beta x \in I \implies \exists y \in I\ s.t\ a - \beta x = y \implies a = \beta x + y\,;$

$a + ze = \beta x + y + ze + \beta\varphi(x)e - \beta\varphi(x)e = \beta x + y - \beta\varphi(x)e + (z + \beta\varphi(x))e\,; \Psi(\beta x + y - \beta\varphi(x)e) = \varphi(\beta x + y) - \beta\varphi(x) = \beta\varphi(x) + \varphi(y) - \beta\varphi(x) = \beta\varphi(x) + \cdot - \beta\varphi(x) = \cdot$

$y \in Ker\varphi \implies \beta x + y - \beta\varphi(x)e \in Ker\Psi = J \implies \forall a + ze \in A \oplus \mathbb{C}e \implies a + ze \in J \oplus \mathbb{C}e$

$A \oplus \mathbb{C}e = A^{\#} = J \oplus \mathbb{C}e$

$\forall D\,;\ D: A \longrightarrow X\quad \exists(x_i)\ \ \forall a \in A\ D(a) = \lim_i (ax_i - x_i a)$

$D: A^{\#} \longrightarrow X \qquad D((a + \cdot e)(b + \cdot e)) = D(a + \cdot e)(b + \cdot e) + (a + \cdot e)D(b + \cdot e)$

$T: A^{\#} \times X \longrightarrow X\ \ \forall x \in X\ \forall a + \lambda e, b + \mu e \in A^{\#}\quad T(a + \lambda e, T(b + \mu e, x)) = T((a + \lambda e)(b + \mu e), x)$

$S = T\big|_A\ \ S: A \times X \longrightarrow X\ \ \forall x \in X\quad \forall a, b \in A\ \ S\big(a, S(b, x)\big) = S(ab, x) \implies D(ab) = D((a + \cdot e)(b + \cdot e)) = D(a + \cdot e)(b + \cdot e) + (a + \cdot e)D(b + \cdot e) = D(a)b + aD(b)$

باید نشان دهیم که

$$\exists(h_i)\ \ \forall a + ze \in A^{\#}\quad D(a + ze) = \lim_i (a + ze)h_i - h_i\,(a + ze)$$

$D(a + ze) = D(a) + zD(e) = \lim_i ax_i - x_i a + z(\lim_i ex_i - x_i e) = \lim_i ax_i - x_i a + zex_i - zx_i e = \lim_i (a + ze)\,x_i - x_i\,(a + ze)$

پس با انتخاب $h_i = x_i$ ثابت می‌شود که

$\forall D\ \ D: A \oplus \mathbb{C}e \longrightarrow X\ \ \exists(h_i)\ \forall a + ze \in A \oplus \mathbb{C}e\quad D(a + ze) = \lim_i ((a + ze)h_i - h_i\,(a + ze))$

پس $A^{\#}$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار است. A نیز همچنین یعنی هر مشتق پیوسته ای مانند تابع مشتق D از $A^{\#}$ به هر $A^{\#} - A^{\#}$ باناخ دو مدول X یک تقریب درونی است و توری مانند (h_i) را در X همواره طوری می‌توان انتخاب نمود که تور ad_{h_i} نسبت به نرم روی $B(A,X)$ کران‌دار باشد.

$$\|ad_{h_i}\| = \sup_{\|b\|_A \le 1} \|ad_{h_i}(b)\| < \infty$$

$$\exists T: A^{\#} \times X \longrightarrow X \quad T(a+\lambda e, T(b+\mu e, x)) = T((a+\lambda e)(b+\mu e), x) = T(ab+\lambda b+\mu a+\lambda\mu, x)$$

$$\exists S: X \times A^{\#} \longrightarrow X \quad S(S(x, a+\lambda e), b+\mu e) = S(x, (a+\lambda e)(b+\mu e)) = S(x, ab+\lambda b+\mu a+\lambda\mu)$$

$$\exists (x_i)\ \forall a \in A\ D(a) = \lim_i ad_{x_i}(a) = \lim_i ax_i - x_i a$$

و هر مشتق پیوسته ای مانند تابع مشتق D از A به هر $A - A$ باناخ دو مدول Y یک تقریب درونی است و توری مانند (g_i) را در Y همواره طوری می‌توان انتخاب نمود که تور ad_{g_i} نسبت به نرم روی $B(A,Y)$ کران‌دار باشد.

$$\|ad_{g_i}\| = \sup_{\|b\|_A \le 1} \|ad_{g_i}(b)\| < \infty$$

$$\exists L: A \times Y \longrightarrow Y \quad L(a, L(b,y)) = L(ab, y)$$

$$\exists K: Y \times A \longrightarrow Y \quad K(K(y,a), b) = K(y, ab)$$

$$\exists (y_i)\ \forall a \in A\ D(a) = \lim_i ad_{y_i}(a) = \lim_i ay_i - y_i a$$

J نیز انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار است ، زیرا $A^{\#} \cong J^{\#}$ لذا $J^{\#}$ انقباض پذیر تقریبی کران‌دار است ، پس

$$\forall P: J^{\#} \longrightarrow X\ \ \exists (h_i) \subseteq X\ \ s.t\ \forall a+\lambda e \in J^{\#}$$

$$P(a+\lambda e) = \lim_i ((a+\lambda e)\, h_i - h_i\, (a+\lambda e))$$

$$S: J \times X \longrightarrow X\ \ S(a, S(b,x)) = S(ab, x)\ \ T: J^{\#} \times X \longrightarrow X$$

$$T(a+\lambda e, x) \coloneqq S(a,x) + U(\lambda, x)$$

$$U: \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$$

یعنی U تابع ضرب اسکالر است. بنابر این $(a+\lambda e)x = b.x + \lambda.x$ فرض کنید که D یک تابع مشتق پیوسته از J به $\mathbf{X}$ باشد که X باناخ J-دو مدول است.

$$D: J \to X \quad D = P\big|_J : J \to X \quad D(a) = P(a + \lambda e) = \lim_i \big((a + \lambda e)h_i - h_i\,(a + \lambda e)\big) = \lim_i (ah_i + \lambda h_i - h_i a - \lambda h_i) = \lim_i ah_i - h_i a$$

لذا هر مشتق از J به هر باناخ J-دو مدول یک به طور تقریبی درونی است. بنابر این J جبر باناخ انقباض پذیر است پس J یک تقریب همانی کران‌دار مانند j_α دارد.

که برای هر α $j_\alpha = a_\alpha + c_\alpha e$ به ازای $a_\alpha \in A$ و $c_\alpha \in \mathbb{C}$ به طوری که

$$c_\alpha = -\varphi(a_\alpha).$$

$$\exists (j_\alpha) \quad \forall x \in J \;\; xj_\alpha - x \to 0 \;\; j_\alpha x - x \to 0 \;\; \forall \alpha \;\; j_\alpha = a_\alpha + c_\alpha e$$

$$\forall a_\alpha \in A$$

$$\forall c_\alpha \in \mathbb{C} \quad s.t \;\; c_\alpha = -\varphi(a_\alpha)$$

$$\varphi: A \to \mathbb{C}$$

$$\tilde{\varphi}: A \oplus \mathbb{C}e \to \mathbb{C} \quad s.t \;\; \tilde{\varphi}(a + \lambda e) = \varphi(a) + \lambda$$

$$\forall a + \lambda e \in A \oplus \mathbb{C}e \quad \forall a \in A \;, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$j_\alpha \in J \implies a_\alpha + c_\alpha e \in J = Ker\tilde{\varphi} \implies \tilde{\varphi}(a_\alpha + c_\alpha e) = 0 \quad \varphi(a_\alpha) + c_\alpha = 0 \implies c_\alpha = -\varphi(a_\alpha)$$

$$j_\alpha = a_\alpha + c_\alpha e = a_\alpha + (-\varphi(a_\alpha))e = a_\alpha - \varphi(a_\alpha)e \implies j_\alpha = a_\alpha - \varphi(a_\alpha)e$$

$$\tilde{\varphi}(j_\alpha) = \tilde{\varphi}(a_\alpha + c_\alpha e) = \varphi(a_\alpha) + c_\alpha = \varphi(a_\alpha) - \varphi(a_\alpha) = 0 \implies a_\alpha + c_\alpha e \in J = Ker\tilde{\varphi} \subseteq A \oplus \mathbb{C}e$$

از طرف دیگر چون (e_i) یک تقریب همانی کران‌دار است پس $\varphi(e_i) \to 1$. اگر مجموعه‌ی E_i را به شکل $E_i = \varphi(e_i)^{-1} e_i$ تعریف کنیم آن‌گاه (E_i) تقریب همانی کران‌دار را برای A حفظ می‌کند و $\varphi(E_i) = 1$ برای هر i.

$$\|E_i\| = \|\varphi(e_i)^{-1} e_i\| < N$$

$$\forall x \in A \;\; \lim_i (xE_i - x) = \lim_i (x\varphi(e_i)^{-1} e_i - x) = \lim_i (x\varphi(e_i)^{-1} e_i - \varphi(e_i)^{-1} x) = \lim_i \varphi(e_i)^{-1} (xe_i - x) = 0$$

$$\forall x \in A \;\; \lim_i (E_i x - x) = \lim_i (\varphi(e_i)^{-1} e_i x - x) = \lim_i (\varphi(e_i)^{-1} e_i x - \varphi(e_i)^{-1} x) = \lim_i \varphi(e_i)^{-1} (e_i x - x) = 0$$

$$\forall x \quad x = \lim_i \alpha_i x \quad s.t \;\; \alpha_i \to 1$$

$$\varphi(E_i) = \varphi(\varphi(e_i)^{-1} e_i) = \varphi(e_i)^{-1} \varphi(e_i) = \frac{\varphi(e_i)}{\varphi(e_i)} = 1$$

$$\forall x \in A \;\; xe_i - x \to 0 \;\; ; \;\; e_i x - x \to 0$$

فرض کنید که $b_{\alpha,i} = a_\alpha + c_\alpha E_i$.

$$\|b_{\alpha,i}\| = \|a_\alpha + c_\alpha E_i\|_{A\oplus \mathbb{C}e} = \|a_\alpha + c_\alpha \varphi(e_i)^{-1} e_i\| = \|a_\alpha\|_A + |c_\alpha \varphi(e_i)^{-1} e_i|$$
$$\|j_\alpha\| = \|a_\alpha + c_\alpha e\| = \|a_\alpha\| + |c_\alpha| < M \implies \|a_\alpha\| < M \quad \forall \alpha\,;\ |c_\alpha| < M$$
$$\implies \|a_\alpha\|_A + |c_\alpha \varphi(e_i)^{-1} e_i| = \|a_\alpha\|_A + |c_\alpha| |\varphi(e_i)^{-1} e_i| < M + MN$$
$$\varphi(e_i)^{-1} \to 1\ ;\ \|e_i\| < N \qquad M, N \in \mathbb{N}$$

دراین صورت تور $(b_{\alpha,i})$ در I کران‌دار است. نشان می‌دهیم که $j_\alpha f \to f$ و $f j_\alpha \to f$ برای هر $f \in I$. باید نشان دهیم که

$$b_{\alpha,i} f = (a_\alpha + c_\alpha E_i) f = a_\alpha f + c_\alpha E_i f \stackrel{?}{=} j_\alpha f + c_\alpha E_i f - c_\alpha f = j_\alpha f + c_\alpha (E_i f - f) \to f$$
$$f b_{\alpha,i} = f(a_\alpha + c_\alpha E_i) = f a_\alpha + f c_\alpha E_i \stackrel{?}{=} f j_\alpha + f c_\alpha E_i - f c_\alpha = f j_\alpha + c_\alpha (f E_i - f) \to f$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $b_{\alpha,i} f = (a_\alpha + c_\alpha E_i) f$ و $f b_{\alpha,i}$

$$j_\alpha f + c_\alpha E_i f - c_\alpha f = a_\alpha f + c_\alpha e f + c_\alpha E_i f - c_\alpha f = (a_\alpha + c_\alpha e + c_\alpha E_i - c_\alpha e) f$$
$$= (a_\alpha + c_\alpha E_i) f = b_{\alpha,i} f$$
$$f j_\alpha + f c_\alpha E_i - f c_\alpha = f a_\alpha + f c_\alpha e + f c_\alpha E_i - f c_\alpha = f(a_\alpha + c_\alpha e + c_\alpha E_i - c_\alpha e) = f(a_\alpha + c_\alpha E_i) = f b_{\alpha,i}$$
$$f \in I \implies f \in A \implies E_i f - f \to \cdot\ ;\ f E_i - f \to \cdot, f \in I \implies (f + \cdot e) \in J$$
$$\tilde{\varphi}(f + \cdot e) = \varphi(f) + \cdot = \varphi(f) = \cdot\ f \in Ker\varphi = I \implies (f + \cdot e) \in Ker\tilde{\varphi} = J$$
$$f j_\alpha - f = (f + \cdot e) j_\alpha - (f + \cdot e) \to \cdot \implies (f + \cdot e) j_\alpha \to (f + \cdot e) \implies f j_\alpha \to f$$
$$j_\alpha f - f = j_\alpha (f + \cdot e) - (f + \cdot e) \to \cdot \implies j_\alpha (f + \cdot e) \to (f + \cdot e) \implies j_\alpha f \to f$$
$$\implies b_{\alpha,i} f = (a_\alpha + c_\alpha E_i) f = a_\alpha f + c_\alpha E_i f = j_\alpha f + c_\alpha E_i f - c_\alpha f = j_\alpha f + c_\alpha (E_i f - f) \to f$$
$$f b_{\alpha,i} = f(a_\alpha + c_\alpha E_i) = f a_\alpha + f c_\alpha E_i = f j_\alpha + f c_\alpha E_i - f c_\alpha = f j_\alpha + c_\alpha (f E_i - f) \to f$$

در نتیجه $(b_{\alpha,i})$ یک تقریب همانی کران‌دار برای I است. لذا I دارای تقریب همانی کران‌دار است پس هر ایده‌آل بسته از هم‌بعد ۱ دارای یک تقریب همانی کران‌دار است.

۵ .تعاریف مرتبط با جبر برلینگ و وزن‌ها

نتیجه‌ی ۲-۲ : فرض کنید که ω یک وزن بر گروه فشرده‌ی موضعی G و $\square$ این گونه تعریف شده باشد که $\Omega(t) = \omega(t)\omega(t^{-1})$ برای هر $t \in G$ ، در این صورت گزاره‌های زیر با یکدیگر معادل هستند.

الف) جبر برلینگ $L^1(G,\Omega)$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار است.

ب) جبر برلینگ $L^1(G,\omega)$ میانگین پذیر است.

پ) گروه G میانگین پذیر و Ω بر G کران‌دار است.

برهان : بنابر حکم [**۱۰ قضیه‌ی ۰**] کافی است نشان دهیم که از (۱) می‌توان (۲) را نتیجه گرفت. فرض کنید که جبر برلینگ $L^1(G,\Omega)$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار و فرض کنید که I^* ایده‌آل افزایشی در $L^1(G,\Omega)$ باشد که

$$I^* = \{ f \in L^1(G,\Omega) : \int_G^{\square} f(x)\,dx = 0 \}$$

در این صورت از آنجایی که I^* ایده‌آلی از هم‌بعد ۱ است و $L^1(G,\Omega)$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار است قضیه‌ی ۲-۱ نتیجه می‌دهد که I^* تقریب همانی کران‌دار دارد. آن را (f_β) می‌نامیم.

اکنون باید نشان دهیم $\underset{\mathbb{C}}{codim}\, I^* = 1$ لذا ثابت می‌کنیم $\underset{\mathbb{C}}{dim} \frac{L^1(G,\Omega)}{I^*} = 1$ ، بنابر این

$$\forall f \in L^1(G,\Omega) \implies f + I^* \in \frac{L^1(G,\Omega)}{I^*}$$

$$\Psi: L^1(G,\Omega) \to \mathbb{C} \quad \Psi(f) = \int_G^{\square} f(x)\,dx$$

$$f = g \implies \forall x \in G \;\; f(x) = g(x) \implies \int_G^{\square} f(x)\,dx = \int_G^{\square} g(x)\,dx \implies \Psi(f) = \Psi(g)$$

$$\Psi(f+g) = \int_G^{\square} (f+g)(x)\,dx = \int_G^{\square} [f(x)+g(x)]\,dx = \int_G^{\square} f(x)\,dx + \int_G^{\square} g(x)\,dx = \Psi(f) + \Psi(g)$$

$$\Psi(f * g) = \int_G^{\square} (f*g)(x)\,dx =$$

$$\iint_G^{\square} f(y)g(y^{-1}x)\,dy\,dx = \int_G^{\square} f(y) \int_G^{\square} g(y^{-1}x)\,dy\,dx =$$

$$\int_G^{\square} f(y) \int_G^{\square} g(y^{-1}x)\,dx\,dy = \int_G^{\square} f(y)[\int_G^{\square} g(x)\,dx]\,dy =$$

$$\int_G^{\square} f(y)\,dy \int_G^{\square} g(x)\,dx = \Psi(f)\Psi(g)$$

پس Ψ دارای همریختی حلقه ای است. بنابر قضیه‌ی اول یکریختی حلقه‌ها

$\frac{L^1(G,\Omega)}{Ker\Psi} \cong R_f$

$Ker\Psi := \{f \in L^1(G,\Omega)\ \ \Psi(f) = 0\} = \{f \in L^1(G,\Omega)\ ;\ \int_G f(x)\,dx = 0\} =$

$I^* \implies \frac{L^1(G,\Omega)}{I^*} \cong R_f$

$\forall \alpha \in \mathbb{C}\ \ \exists f \in L^1(G,\Omega)\ \ \ s.t\ \ \Psi(f) = \alpha \implies \int_G f(x)\,dx = \alpha \implies$ پوشا: Ψ

$\implies R_f = \mathbb{C} \implies \frac{L^1(G,\Omega)}{I^*} \cong \mathbb{C} \implies \dim_{\mathbb{C}} \frac{L^1(G,\Omega)}{I^*} = 1 \implies \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} I^* = 1$

فرض کنید که $\Phi \in L^1(G,\Omega)$ باشد به طوری که $\int_G \Phi(x)\,dx = 1$. در این صورت

$\delta_x * \Phi - \Phi \in I^*$ و برای هر $x \in G$

$\int_G (\delta_x * \Phi - \Phi)(z)\,dz = \int_G [\int_G \delta_x(y)\Phi(z^{-1}y)dy - \Phi(z)]\,dz =$

$\int_G \delta_x(y)\Phi(z^{-1}y)dy - \int_G \Phi(z)\,dz = \int_G \Phi(z^{-1}x)\,dz - \int_G \Phi(z)\,dz =$

$\int_G \Phi(z)\,dz - \int_G \Phi(z)\,dz = 0 \implies \delta_x * \Phi - \Phi \in I^*$

$\forall h \in I.\ h * f_\beta - h \to 0\ ;\ f_\beta * h - h \to 0 \quad i.e\ \int_G h(y) f_\beta(z^{-1}y)\,dy -$

$h(z) \to 0\ i.e\ \int_G \left|\int_G h(y) f_\beta(z^{-1}y)\,dy - h(z)\right| dz \to$

$0\ ; \int_G f_\beta(y) h(z^{-1}y)\,dy - h(z) \to 0\ \int_G \left|\int_G f_\beta(y) h(z^{-1}y)\,dy -\right.$

$\left. h(z)\right| dz \to 0 \quad i.e$

$(\delta_x * \Phi - \Phi) * f_\beta - (\delta_x * \Phi - \Phi) \to 0$

$(\delta_x * \Phi * f_\beta - \Phi * f_\beta - \delta_x * \Phi + \Phi) \to 0 \Rightarrow (\delta_x * (\Phi - \Phi * f_\beta)) - (\Phi - \Phi * f_\beta)) \to 0$

$\implies (\delta_x * \Phi * f_\beta - \Phi * f_\beta - \delta_x * \Phi + \Phi)(y) = (\delta_x * \Phi * f_\beta)(y) - (\Phi * f_\beta - \delta_x * \Phi + \Phi)(y)$

$< \Phi - \Phi * f_\beta, 1 >= \int_G (\Phi - (\Phi * f_\beta))(x)\bar{1}(x)\,dx = \int_G (\Phi - (\Phi * f_\beta))(x)1(x)\,dx = \int_G (\Phi - (\Phi * f_\beta))(x)\,dx = \int_G [\Phi(x) - \int_G \Phi(y) f_\beta(y^{-1}x)]\,dy\,dx =$

$\int_G \Phi(x)\,dx - \int_G \Phi(y) f_\beta(y^{-1}x)\,dy = 1 - \int_G \Phi(y) f_\beta(y^{-1}x)\,dy\,dx \stackrel{?}{=} 1 - 0 =$

$1 \implies \int_G (\Phi - (\Phi * f_\beta))(x)\,dx = 1$

پس $[\delta_x * (\Phi - \Phi * f_\beta) - (\Phi - \Phi * f_\beta)] \in I^\star$ لذا

$[\delta_x * (\Phi - \Phi * f_\beta) - (\Phi - \Phi * f_\beta)] \to 0$ بنابر (۳=>۱) قضیه‌ی ۰ $L^1(G,\omega)$ میانگین پذیر است.

$$< f,h >= \int_G f(x)\overline{h}(x)\,dx \;; f \in X = L^1(G,\Omega)\ ,\ h \in X^* = L^{1^*}(G,\Omega) \implies$$

$$< \Phi - \Phi * f_\beta, 1 >= \int_G (\Phi - (\Phi * f_\beta))(x)\bar{1}(x)\,dx = 0$$

$$(\mu * f)(x) = \int_G f(xy^{-1})\,d\mu(y) \qquad \mu\text{: اندازه}$$

$$(f * \mu)(x) = \int_G f(xy^{-1})\Delta(y^{-1})\,d\mu(y) \qquad \mu\text{: اندازه}$$

نتیجه‌ی ۲-۳ : فرض کنید که ω یک وزن متقارن بر G باشد. در این صورت $L^1(G,\omega)$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار است اگر و تنها اگر میانگین پذیر باشد.

برهان : فرض کنید که $L^1(G,\omega)$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار باشد.

اکنون $\omega_a = \sqrt{\omega}$ را بر G در نظر بگیرید. در این صورت

$$\Omega_a(x) = \sqrt{\Omega\,(x)} = \sqrt{\omega(x)\omega(x^{-1})} = \sqrt{\omega(x)\omega(x)} = \sqrt{\omega^2(x)} = \omega(x) \quad \forall x \in G$$

$$\implies \omega = \Omega_a = \sqrt{\Omega}$$

پس $\Omega_a = \omega$ متقارن ساز $\omega_a = \sqrt{\omega}$ است. بنابر نتیجه‌ی ۲-۲

$(2L^1(G,\omega_a)<=1)$ میانگین پذیر است.

اکنون بنابر [**۱۰ قضیه‌ی ۰**] $L^1(G,\Omega_a) = L^1(G,\omega)$ میانگین پذیر است.

عکس این مطلب بدیهی است زیرا هر جبر باناخ میانگین پذیر، انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار است.

$$\forall D: A \longrightarrow X^* \ \exists(x_i^*) \ \forall a \in A \ D(a) = \lim_i ax_i^* - x_i^* a$$

اکنون باید نشان دهیم که

$$\forall D: A \longrightarrow X \ \exists(g_i) \ \forall a \in A \ D(a) = \lim_i ag_i - g_i a \implies$$

$$\exists(h_i)\ s.t\ \|ad_{h_i}\| = \sup_{\|b\|\le 1} \|ad_{h_i}(b)\| < \infty$$

نمی‌دانیم که آیا از قضیه‌ی ۲-۱ می‌توان نتیجه گرفت که A فقط یک جبر میانگین پذیر تقریبی کران‌دار است. اگر این درست باشد آن‌گاه در بالا دو نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید. اول ما استدلال از[**۲ قضیه‌ی ۳.۳**] را برای برهان لم زیر می‌نویسیم.

لم ۲-۴ : فرض کنید که A یک جبر باناخ میانگین پذیر به طورتقریبی کران‌دار باشد ، و فرض کنید که(a_α) و (b_β) دو تور از عناصر A باشند، اگر

$$\lim_\alpha b_\beta a_\alpha = b_\beta \ \forall\beta \ ; \ \lim_\beta b_\beta a_\alpha = a_\alpha \ \ \forall\alpha \ \ i.e \ ;$$
$$\forall V_{b_\beta} \ \exists\alpha_. \in D \ \forall\alpha \in D \ \alpha \geq \alpha_. \implies b_\beta a_\alpha \in V_{b_\beta}$$
$$\forall V_{a_\alpha} \ \exists\beta_. \in D \ \forall\beta \in D \ \beta \geq \beta_. \implies b_\beta a_\alpha \in V_{a_\alpha}$$

و $K > 0$ چنان موجود باشد که $\|aa_\alpha\| \leq K\|a\|$ و $\|b_\beta a\| \leq K\|a\|$ برای هر $a \in A$ و برای هر α, β آن‌گاه (a_α) و (b_β) کران‌دارند.

برهان : فرض کنید که

$$\|ma_\alpha\| \leq K\|m\| \ ; \|b_\beta m\| \leq K\|m\| \ \ \forall m \in A \hat{\otimes} A$$
$$\|Ta_\alpha\| \leq K\|T\| \ ; \|b_\beta T\| \leq K\|T\| \quad \forall T \in (A \hat{\otimes} A)^{**}$$

فرض کنید که (F_i) و(G_i) و (M_i) و C تور هایی باشند که

الف) $\pi(M_i) = F_i + G_i$

ب) $aF_i \to \kappa(a)$ برای هر $a \in A$.

پ) $\|aF_i\| \leq C\|a\|$ برای هر $a \in A$ و هر i

ت) $G_i a \to \kappa(a)$ برای هر $a \in A$.

ث) $\|G_i a\| \leq C\|a\|$ برای هر $a \in A$ و هر i.

ج) $aM_i - M_i a - a\otimes G_i + F_i\otimes a \to 0$ برای هر $a \in A$.

چ) $\|aM_i - M_i a - a\otimes G_i + F_i\otimes a\| \leq C\|a\|$ برای هر $a \in A$ و هر i.

فرض کنید که تور (b_β) کران‌دار نباشد به تناقض می‌رسیم. برای هر i و برای هر β داریم،

$$\|b_\beta M_i - M_i b_\beta - b_\beta \otimes G_i + F_i \otimes b_\beta\| \leq \|b_\beta\| \implies \|(b_\beta M_i - M_i b_\beta - b_\beta \otimes G_i + F_i \otimes b_\beta)a_\alpha\| \leq KC\|b_\beta\|$$

با استفاده از نامساوی مثلث و ضربگر-بی کران بودن مجموعه‌ی (b_β) داریم پس (b_β) و به همین شکل (a_α) کران‌دار می‌باشند.

$$\|b_\beta\|\|G_i a\| \le KC\|b_\beta\| + \|b_\beta(M_i.a_\alpha)\| + \|M_i(b_\beta.a_\alpha)\| + \|F_i\|\|b_\beta a_\alpha\| \le KC\|b_\beta\| + K\|M_i.a_\alpha\| + K\|M_i\|\|a_\alpha\| + K\|F_i\|\|a_\alpha\| \implies \|G_i a_\alpha\| \le KC + [(\frac{K}{\|b_\beta\|})(\|M_i.a_\alpha\| + \|M_i\|\|a_\alpha\| + \|F_i\|\|a_\alpha\|]$$

برای هر α, β و هر i. با ثابت فرض کردن α, i با توجه به این فرض که (b_β) مجموعه ای بی کران است نتیجه می‌شود که $\|G_i a_\alpha\| \le KC$ با ثابت فرض کردن i به دست می‌آوریم $\|a_\alpha\| \le KC$ برای هر α.

اما از آن جایی که (a_α) تقریب همانی راست است و $\{b_\gamma\}$ یک مجموعه‌ی ضربگر-کران‌دار چپ است به دست می‌آوریم

$$\|b_\gamma\| = \lim_\alpha \|b_\gamma a_\alpha\| \le \limsup_\alpha K\|a_\alpha\| \le K^2 C$$

برای هر γ. این نا مساوی با این که (b_γ) بی کران فرض شده بود در تناقض است. لذا (b_γ) و (a_α) کران‌دار هستند.

از اثبات قضیه‌ی ۲-۱ این که I ایده‌آل بسته‌ی هم‌بعد ۱ از A است را به دست می‌آوریم و می‌توانیم تعریف کنیم ،

$$J = \{a + te\,;\ a \in A, t \in \mathbb{C}\ \ \varphi(a) + t = 0\}\ \ \varphi(a) + t = \tilde{\varphi}(a + te)$$

از این که φ یک تابعک خطی ضربی است روی A است که $I = Ker\varphi$. پس J یک زیر جبر $A \oplus \mathbb{C}e$ و I یک ایده‌آل بسته از J است. در این صورت

$$I = AJ = JA = AJA\ ;\ J^\# \cong A^\# = A \oplus \mathbb{C}e\ .$$

۶. گزاره‌ها و نتایج مربوط به ایده‌آل‌ها و تقریب همانی کران‌دار

گزاره‌ی ۲-۵ : فرض کنید که A یک جبر باناخ میانگین پذیر به طور تقریبی کراندار باشد، به همراه یک تقریب همانی کراندار و I ایده‌آل بسته از هم‌بعد یک باشد. فرض کنید که J یک ایده‌آل بسته از $A \oplus \mathbb{C}e$ باشد. فرض کنید که

الف) یک جبر باناخ چپ مدول دوگان به نام M_l وجود دارد که یک A مدول چپ است و J را می‌توان با یک نگاشت پیوسته در M_l نشاند و $I = AM_l$

ب) یک جبر باناخ راست مدول دوگان به نام M_r وجود دارد که یک A مدول راست است و J را می‌توان با یک نگاشت پیوسته در M_r نشاند و $I = M_rA$

در این صورت I دارای یک تقریب همانی کران‌دار است.

برهان : اگر A میانگین پذیر به طور تقریبی کران‌دار باشد ، آن‌گاه J که در برهان قضیه‌ی ۲-۱ به دست آمده است ، نیز چنین است :

$$.: A \times M_l \longrightarrow M_l$$
$$.: A \oplus \mathbb{C}e \times M_l \longrightarrow M_l$$
$$(a+\lambda e)[m+n] \stackrel{?}{=} (a+\lambda e)m + (a+\lambda e)n \; ; [(a+\lambda e)+(b+\mu e)]m \stackrel{?}{=} (a+\lambda e)m + (b+\mu e)m \; ; (a+\lambda e)[(b+\mu e)m] \stackrel{?}{=} [(a+\lambda e)(b+\mu e)]m = (ab+\lambda b+\mu a+\lambda\mu e)m$$

عمل ضرب را به این شکل تعریف می‌نماییم :

$$(a+\lambda e)m = am + \lambda m$$
$$(a+\lambda e)[m+n] = a(m+n) + \lambda(m+n) = am + an + \lambda m + \lambda n = am + \lambda m + an + \lambda n = (a+\lambda e)m + (a+\lambda e)n \; ;$$
$$[(a+\lambda e)+(b+\mu e)]m = (a+b+(\lambda+\mu)e)m = (a+b)m + (\lambda+\mu)m = am + bm + \lambda m + \mu m = am + \lambda m + bm + \mu m = (a+\lambda e)m + (b+\mu e)m$$
$$(a+\lambda e)[(b+\mu e)m] = (a+\lambda e)[bm+\mu m] = abm + \lambda bm + \mu am + \lambda\mu m = (ab+\lambda b+\mu a+(\lambda\mu)e)m = (a+\lambda e)(b+\mu e)m = [(a+\lambda e)(b+\mu e)]m$$

پس M_l از A-مدول چپ قابل توسیع به دوگان $A^{\#}$ -مدول چپ است. اکنون می‌توانیم M_l را به عنوان باناخ J -مدول چپ در نظر بگیریم. یک عمل راست مدول بدیهی را در M_l با نگاشت زیر تعریف می‌نماییم.

$$\tau: J \longrightarrow M_l$$

مشتق پیوسته است از J به M_l.

از آن جایی که J میانگین پذیر به طور تقریبی کران‌دار است و M_l دوگان باناخ J -دو مدول است پس تور (m_i) در M_l و ثابت مثبتی مانند K چنان وجود دارند که $am_i \to a$ و $\|am_i\| \leq K\|a\|$ برای هر $a \in J$.

فرض کنید که (e_j) در A یک تقریب همانی کران‌دار برای A باشد. حاصلضرب ترتیبی جهت‌دار را به این صورت $\alpha = (i,j)a_\alpha = e_j m_i$ تعریف می‌کنیم در این صورت بنابر فرض تور (a_α) در I می‌باشد و علاوه بر آن

$$\|aa_\alpha\| \le cK\|a\| \quad \forall a \in J \ \forall \alpha \quad ; \ \|e_j\| \le c$$

یعنی c کران (e_j) است.

$$\lim_j ae_j = a \ ; \ \lim_i am_i = a$$

$$\|aa_\alpha - a\| = \|ae_j m_i - a\| = \|ae_j m_i - am_i + am_i - a\| \le \|ae_j m_i - am_i\| + \|am_i - a\| \le K\|ae_j - a\| + \|am_i - a\| \to \cdot \implies aa_\alpha - a \to \cdot$$

لذا I یک تقریب همانی کران‌دار چپ است. اکنون به طور مشابه برای M_r داریم

$$\exists(b_\beta) \ s.t \ \|b_\beta a\| \le cK\|a\| \ \forall a \in J$$
$$\forall \beta \quad \lim_\beta b_\beta a_\alpha = a \ \forall a \in I$$

بنابر لم ۲-۴ برای J تورهای (a_α) و (b_β) کران‌دار هستند. بنابر این I دارای یک تقریب همانی چپ و راست کران‌دار است. پس I دارای یک تقریب همانی کران‌دار است.

نتیجه‌ی ۲-۶ : فرض کنید که جبر باناخ A میانگین پذیر به طورتقریبی کران‌دار باشد و یک تقریب همانی کران‌دار داشته باشد. اگر اپراتورهای ضرب چپ و راست به وسیله‌ی عناصر A در A فشرده‌ی ضعیف باشند ، آن‌گاه هر ایده‌آل دو طرفه‌ی بسته از هم‌بعد ۱ در A یک تقریب همانی کران‌دار خواهد داشت.

برهان : فرض کنید که I ایده‌آل دو طرفه‌ی بسته از هم‌بعد ۱ از A باشد و فرض کنید که J نیز یک ایده‌آل باشد که در قضیه‌ی ۲-۱ تعریف شده‌اند :

$$\varphi: A \to \mathbb{C} \quad I = Ker\varphi \quad ; \quad \Gamma: A^\# \to \mathbb{C} \quad J = Ker\Gamma$$

از برهان قضیه‌ی ۲-۱ و از این که A یک تقریب همانی کران‌دار دارد قضیه تجزیه‌ی کوهن نتیجه می‌دهد که $I = AI = IA$ اکنون با فرض $M_l = M_r = J^{**}$ داریم

$$l_a: A \to A, \ l_a(b) = ab \ ; \ R_a: A \to A, \ R_a(b) = ba$$

$L_a(\{b, \|b\|_A \le 1\}) \subseteq A$ فشرده باشد

$R_a(\{b, \|b\|_A \le 1\}) \subseteq A$ فشرده باشد

بنابر [**۲۱ ، لم ۳**] این گزاره‌ها با یکدیگر معادل هستند :

الف) $\pi(A)$ یک ایده‌آل چپ A است.

ب) برای هر a در A نگاشت $b \to ba$ فشرده‌ی ضعیف باشد.

پ) برای هر a در A نگاشت $f \to fa$ فشرده‌ی ضعیف باشد.

لذا A یک ایده‌آل دوطرفه در A^{**} است.

$$\forall a \in A \subseteq A^{**} \implies$$

$$A^{**} = \{\lambda\,;\ \text{خطی} - \text{کران‌دار}\ \lambda: A^* \to \mathbb{C}\}\ \hat{a}: A^* \to \mathbb{C}\ s.t\ \hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$$

$$\forall \varphi \in A^*\ \forall a \in A \subseteq A^{**}\ \forall F \in A^{**}$$

$$.: A^{**} \times A^{**} \to A^{**}$$

$$\hat{a}F: A^* \to \mathbb{C} \quad \hat{a}F(\varphi) = \hat{a}(F\varphi) = F(\dot{a}\varphi)\ \exists b \in A\ s.t\ \hat{a}F(\varphi) = b$$

از آنجایی که π نگاشت کانونی است بنابر این پوشا نیز هست لذا $\pi(A) = A$. و چون اپراتورهای چپ و راست فشرده‌ی ضعیف هستند لذا $\pi(A) = A$ در A^{**} هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست می‌باشد.

پس AJ^{**} زیر مجموعه‌ی $AA^{**} + A$ است و $AA^{**} + A$ زیر مجموعه‌ی A است. اکنون فرض کنید که φ یک تابعک خطی ضربی با هسته I باشد.

$$\varphi(AJ^{**}) = \{\varphi(a\hat{y});\ a \in A, \hat{y} \in J^{**}\}$$

$$\forall a \in A \subseteq A^{**}\ ;\ \forall \hat{y} \in J^{**}$$

$$\Phi(a\hat{y}(\Gamma)) = \varphi(a\Gamma(y))\ ;\ \Gamma: J \to \mathbb{C}\ m \in J^{**} \implies \exists y \in J\ s.t\ \hat{y} = m$$

$$\exists b \in A, \exists \mu \in \mathbb{C}\ s.t\ y = b + \mu e \in J \implies \varphi(a\hat{y}(\Gamma)) = \varphi(a\Gamma(y)) =$$

$$\varphi(a\Gamma(b + \mu e)) = \varphi(a(\varphi(b) + \mu)) = \varphi(a\varphi(b) + a\mu) = \varphi(a)\varphi(b) +$$

$$\varphi(a\mu) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(a)\varphi(\mu) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(a)\mu\varphi(1) =$$

$$\varphi(a)\varphi(b) + \varphi(a)\mu = \varphi(a)(\varphi(b) + \mu) = \varphi(a)\Gamma(b + \mu e) = 0 \implies$$

$$\varphi(AJ^{**}) = 0 \implies$$

$$AJ^{**} \subseteq I$$

$$\varphi(J^{**}A) = \{\varphi(\hat{y}a)\ ;\ a \in A, \hat{y} \in J^{**}\}$$

$$\forall a \in A \subseteq A^{**}\ \forall \hat{y} \in J^{**}\ \varphi(\hat{y}(\Gamma)a) = \varphi(\Gamma(y)a)\ ;\ \Gamma: J \to \mathbb{C}\ m \in J^{**} \implies$$

$$\exists y \in J\ s.t\ \hat{y} = m\ \exists b \in A, \exists \mu \in \mathbb{C}\ s.t\ y = b + \mu e \in J \implies \varphi(\hat{y}(\Gamma)a) =$$

$$\varphi(\Gamma(y)a) = \varphi(\Gamma(b + \mu e)a) = \varphi((\varphi(b) + \mu)a) = \varphi(\varphi(b)a + \mu a) =$$

$$\varphi(b)\varphi(a) + \varphi(\mu a) = \varphi(b)\varphi(a) + \varphi(a)\varphi(\mu) = \varphi(b)\varphi(a) + \mu\varphi(1)\varphi(a) =$$

$\varphi(b)\varphi(a) + \mu\varphi(a) = (\varphi(b) + \mu)\varphi(a) = \Gamma(b + \mu e)\varphi(a) = ۰ \implies \varphi(J^{**}A) = ۰ \implies J^{**}A \subseteq I$

در این صورت از آن جایی که $\varphi(AJ^{**}) = ۰$ لذا AJ^{**} زیر مجموعه‌ی $I = Ker\varphi$ است. همچنین می‌دانیم که $I = AI$ زیر مجموعه‌ی AJ و AJ زیر مجموعه‌ی AJ^{**} است. لذا $AJ^{**} = I$. به طور مشابه تساوی $J^{**}A = I$ را به دست می‌آوریم :

$\varphi(AJ^{**}) = ۰ \implies AJ^{**} \subseteq Ker\varphi = I \; ; \; AJ^{**} \supseteq AJ \supseteq AI = I \implies AJ^{**} = I = AM_l$

$\varphi(J^{**}A) = ۰ \implies J^{**}A \subseteq Ker\varphi = I \; ; \; J^{**}A \supseteq JA \supseteq IA = I \implies J^{**}A = I = M_rA$

بنابر گزاره‌ی ۲-۵ و $I = M_rA = J^{**}A$ و $I = AM_l = AJ^{**}$ پس I دارای تقریب همانی کران‌دار است.

۷ .گزاره‌ها و نتایج مربوط به گروه‌های موضعاً فشرده و وزن‌ها

نتیجه‌ی ۲-۷ : فرض کنید که ω یک وزن بر G باشد به طوری که $\lim_{x\to\infty} \omega(x) = \infty$ ، اگر $L^۱(G,\omega)$ میانگین پذیر به طور تقریبی کران‌دار باشد در این صورت ایده‌آل

$I^\star = \{f \in L^۱(G,\omega) : \int_G f(x)\,dx = ۰\}$

دارای یک تقریب همانی کران‌دار است.

برهان : در فرض نتیجه، ω دور از ۰ کران‌دار است. لذا$I^\star$ یک ایده‌آل بسته از $L^۱(G,\omega)$ از هم‌بعد ۱ است. زیرا

$\exists \Psi : L^۱(G,\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \Psi(f) = \int_G f(x)\,dx$

$f = g \implies \forall x \in G \;\; f(x) = g(x) \implies \int_G f(x)\,dx = \int_G g(x)\,dx \implies \Psi(f) = \Psi(g)$

$\Psi(f+g) = \int_G (f+g)(x)\,dx = \int_G [f(x)+g(x)]\,dx = \int_G f(x)\,dx + \int_G g(x)\,dx = \Psi(f) + \Psi(g)$

$\Psi(f * g) = \int_G (f*g)(x)\,dx = \iint_G f(y)g(y^{-۱}x)\,dy\,dx =$

$\int_G f(y) \int_G g(y^{-۱}x)\,dy\,dx = \int_G f(y) \int_G g(y^{-۱}x)\,dx\,dy =$

$\int_G f(y)[\int_G g(y^{-1}x)\,dx]\,dy = \int_G f(y)\,dy \int_G g(x)\,dx = \Psi(f)\Psi(g) \Rightarrow$

$\frac{L^1(G,\Omega)}{Ker\Psi} \cong R_f$

$Ker\Psi := \{f \in L^1(G,\Omega) : \Psi(f) = 0\} = \{f \in L^1(G,\Omega) ; \int_G f(x)\,dx = 0\} =$

$I^* \Rightarrow \frac{L^1(G,\Omega)}{I^*} \cong R_f$

$\forall \alpha \in \mathbb{C} \ \exists f \in L^1(G,\Omega) \ s.t \ \Psi(f) = \alpha \Rightarrow \int_G f(x)\,dx = \alpha \Rightarrow$

Ψ: پوشا

$\Rightarrow R_f = \mathbb{C} \Rightarrow \frac{L^1(G,\Omega)}{I^*} \cong \mathbb{C} \Rightarrow$

$\dim_{\mathbb{C}} \frac{L^1(G,\Omega)}{I^*} = 1 \Rightarrow \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} I^* = 1$

اکنون نشان می‌دهیم که I^* یک ایده‌آل دو طرفه‌ی از هم‌بعد ۱ برای $L^1(G,\omega)$ می‌باشد:

$$\forall h \in L^1(G,\omega) \ \forall f \in I^*$$

$\int_G (f * h)(x)d\lambda(x) = \iint_G f(y^{-1}x)h(y)d\lambda(y)d\lambda(x) =$

$\iint_G f(y^{-1}x)h(y)d\lambda(x)d\lambda(y) = \iint_G f(x)h(y)d\lambda(x)d\lambda(y) =$

$\iint_G f(x)d\lambda(x)h(y)d\lambda(y) = 0 \Rightarrow f * h \in I^*$

$\int_G (h * f)(x)d\lambda(x) = \iint_G h(y^{-1}x)f(y)d\lambda(y)d\lambda(x) =$

$\iint_G h(y^{-1}x)f(y)d\lambda(x)d\lambda(y) = \iint_G h(x)f(y)d\lambda(x)d\lambda(y) =$

$\iint_G h(x)d\lambda(x)f(y)d\lambda(y) = 0 \Rightarrow h * f \in I^*$

پس I^* یک ایده‌آل دو طرفه‌ی از هم‌بعد ۱ برای $L^1(G,\omega)$ است. اکنون نشان می‌دهیم که I^* بسته است.

$\forall f \in \overline{I^*} \ \exists(f_\alpha) \in I^* \ f_\alpha \to f \ \|f_\alpha - f\|_\omega = \int_G |f_\alpha - f|\omega d\lambda \to 0 \Rightarrow$

$\int_G f_\alpha \omega d\lambda - \int_G f\omega\,d\lambda \to 0 \Rightarrow 0 - \int_G f\omega\,d\lambda \to 0 \Rightarrow \int_G f\omega\,d\lambda = 0 \Rightarrow$

$f \in I^* \Rightarrow \overline{I^*} \subseteq I^* \subseteq \overline{I^*} \Rightarrow \overline{I^*} = I^*$

بنابر این I^* یک ایده‌آل بسته نیز می‌باشد.

فضای $M(G,\omega)$ یک باناخ $L^1(G,\omega)$-مدول چپ دوگان با پیش دوگان مدول $C_.(G,\omega^{-1})$ است.

$M(G,\omega) = Y^* = \{h ; h: Y \to \mathbb{C}\}$;

$\exists T\ T: L^1(G,\omega)\times Y\longrightarrow Y\quad T(f,T(h,y))=T(f*h,y)$

$\exists S\ \ S: Y\times L^1(G,\omega)\longrightarrow Y\quad S(S(y,f),h)=S(y,f*h)$

از این که $1\in C_.(G,\omega^{-1})$ پس $M_.=\{m\in M(G,\omega):<1,m>=0\}$ یک زیر مدول $M(G,\omega)$ است که نسبت به توپولوژی ضعیف* بسته است.

فرض کنید که $M_l=M_r=M_.$

در این صورت شرایط ۱و۲ از گزاره‌ی ۲-۵ نتیجه می‌دهند که

$J=J_.=\{f+t6_e: f\in L^1(G,\omega),$

$t\in\mathbb{C}\ \ s.t\ \int_G f(x)\,dx+t=0\}$

$\forall f\in L^1(G,\omega);\ \forall m\in M_.\ (f*m)(x)=\int_G f(xt^{-1})\Delta(t^{-1})\,dm(t)$

$\int_G(f*m)(x)\,d\lambda(x)=\iint_G f(xt^{-1})\Delta(t^{-1})\,dm(t)d\lambda(x)=$

$\iint_G f(x)\Delta(t^{-1})\,d\lambda(t)dm(x)=\iint_G f(x)dm(x)\Delta(t^{-1})\,d\lambda(t)=0\quad\forall x\in G\implies$

$f*m\in I^\star\implies L^1(G,\omega)M_.\subseteq I^\star$

$$\forall h\in I^\star\ \int_G h(x)\,d\lambda(x)=0\ \exists f\in \mathrm{L}^1(G,\omega)\ \ \exists m\in M_.\ \ s.t$$

$h=f*m$

$\forall f\in L^1(G,\omega)\ ;\ \forall m\in M_.\ (m*f)(x)=\int_G f(t^{-1}x)\,dm(t)=\int_G(m*f)(x)\,d\lambda(x)=\iint_G f(t^{-1}x)\,dm(t)d\lambda(x)=\iint_G f(t^{-1}x)d\lambda(t)dm(x)=\iint_G f(x)\,d\lambda(t)\,dm(x)=\iint_G f(x)\,dm(x)\,d\lambda(t)=0\ \ \forall x\in G\implies m*f\in I^\star\implies M_.L^1(G,\omega)\subseteq I^\star$

$$\forall h\in I^\star\ \int_G h(x)\,d\lambda(x)=0\ \ \exists f\in L^1(G,\omega)\ \exists m\in M_.$$

$$:\ h=m*f$$

$$\forall h\in I^\star\ \int_G h(x)\,d\lambda(x)=0\ \ \exists f\in L^1(G,\omega)\ \exists m\in M_.$$

$$:\ h=f*m$$

$I^\star\stackrel{?}{=}M_.L^1(G,\omega)=M_rA\ ;\ I^\star\stackrel{?}{=}L^1(G,\omega)\quad M_.=AM_l$

و باید نشان دهیم که $\{O_X$ توپولوژی روی X است.$\}$

$\exists P: J_{\cdot} \longrightarrow M_{\cdot}\ s.t\ \forall U \in O_{M(G,\omega)}\ \ P^{-1}(U) \in O_{J_{\cdot}}$

اکنون با استفاده از حکم گزاره‌ی ۲-۵ حکم به دست می‌آید.

نتیجه‌ی ۲-۸ : فرض کنید که ω یک وزن متقارن بر G باشد. اگر $\lim_{x\to\infty} \omega(x) = \infty$ آن‌گاه $L^1(G,\omega)$ میانگین پذیر به طور تقریبی کران‌دار نیست.

$\exists D: A \longrightarrow X\ \ \forall (x_i)\ \ \exists a \in A\ \ s.t\ \ D(a) \neq \lim_i ax_i - x_i a$

برهان : فرض کنید که $\omega^\star = \sqrt{\omega}$ پس $\omega = \Omega^\star$ که متقارن ساز $\omega^\star$ باشد.

$\omega(x) = \omega(x^{-1})$

$\Omega^\star(x) = \omega^\star(x)\omega^\star(x^{-1}) = \omega^\star(x)\omega^\star(x) \Longrightarrow \Omega^\star(x) = \left(\omega^\star(x)\right)^2 = \left(\sqrt{\omega(x)}\right)^2 = \omega(x)\ \forall x \in G\ \Longrightarrow \Omega^\star = \omega.$

فرض کنید که $\lim_{x\to\infty} \omega(x) = \infty$ و $L^1(G,\omega)$ میانگین پذیر به طور تقریبی کران‌دار باشد در این صورت ایده‌آل مکمل شده از $L^1(G,\omega)$ یک تقریب همانی کران‌دار دارد. بنابر استدلال نتیجه‌ی ۲-۷ $L^1(G,\omega)$ دارای تقریب همانی کران دار است بنابر نتیجه‌ی ۲-۳ $L^1(G,\omega)$ انقباض پذیر تقریبی کران‌دار است و از این که ω متقارن ساز $\omega^\star$ است ، از ۲-۲ نتیجه می‌شود که $L^1(G,\omega^\star)$ میانگین پذیر است و $\omega = \Omega^\star$ کران‌دار است که با($\lim_{x\to\infty} \omega(x) = \infty$) در تناقض است. لذا $L^1(G,\omega)$ میانگین پذیر به طور تقریبی کران‌دار نیست.

مثال ۲-۹ : اگر ω یک وزن پیوسته بر G باشد که $\limsup_{x\in G} \frac{\omega(x^{-1})}{\omega(x)} \leq L$ به ازای ثابت $L > 0$ و $\lim_{x\to\infty} \omega(x) = \infty$ ، آن‌گاه $L^1(G,\omega)$ میانگین پذیر به طور تقریبی کران دار نیست.

برهان : فرض نتیجه می‌دهد که ثابت های مثبت t و c وجود دارند به طوری که

$c\omega(x^{-1}) \leq \omega(x) \leq t\omega(x^{-1})\quad \forall x \in G\ \Longrightarrow \sqrt{c}\omega(x^{-1}) \leq \omega(x) \leq \sqrt{t}\omega(x^{-1})\ \ \forall x \in G$

زیرا با انتخاب

$c = max\{\frac{\omega(x_1^{-1})}{\omega(x_1)}, \frac{\omega(x_2^{-1})}{\omega(x_2)}, \dots, \frac{\omega(x_m^{-1})}{\omega(x_m)}, L\}$;

$t = max\{\frac{\omega(x_1)}{\omega(x_1^{-1})}, \frac{\omega(x_1)}{\omega(x_2^{-1})}, \dots, \frac{\omega(x_m)}{\omega(x_m^{-1})}, L\}$

دیده می‌شود که

$\forall x \in G\ \sqrt{c}\omega(x^{-1}) \leq \omega(x) \leq \sqrt{t}\omega^\star(x^{-1})$

و $\boldsymbol{\omega^{\star}(x) = \sqrt{\Omega(x)}}$ یکریختند $\boldsymbol{L^{1}(G,\omega)}$, $\boldsymbol{L^{1}(G,\omega^{\star})}$ ۲-۸ ($\boldsymbol{G}$ بر $\boldsymbol{\omega^{\star}}$ متقارن است. بنابر نتیجه‌ی و $\boldsymbol{L^{1}(G,\omega^{\star}) \cong L^{1}(G,\omega)}$ میانگین پذیر به طور تقریبی کران‌دار نیستند.

۸ .تعاریف وزن‌ها و نگاشت‌های اندازه‌گیری روی گروه‌های فشرده

نتیجه‌ی قبل دسته‌ی وسیعی از وزن‌ها را پوشش می‌دهد که بر گروه‌های به طور فشرده تولید شده تعریف شده‌اند.

تعریف ۲-۰۶: فرض کنید $\boldsymbol{G}$ یک گروه فشرده‌ی موضعی باشد که به وسیله‌ی همسایگی فشرده‌ی متقارن $\boldsymbol{U}$ از عضو همانی $\boldsymbol{G}$ تولید شده باشد. قرار دهید

$$\boldsymbol{\tau: G \longrightarrow \mathbb{N} \quad s.t \quad \tau(x) = min\{n \in \mathbb{N}\,;\, x \in U^{n}\} \quad \forall x \in G.}$$

در این صورت $\boldsymbol{\tau}$ اندازه‌پذیر بورل متقارن کران‌دار موضعی است.

وزن‌های نمایی و چندجمله‌ای روی $\boldsymbol{G}$ وابسته به نگاشت $\boldsymbol{\tau}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$\boldsymbol{\omega_{\alpha}(x) = (1 + \tau(x))^{\alpha}}$$

$$6_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e^{\tau(x)^{\beta}}}$$

که $\boldsymbol{\alpha > 0}$ و $\boldsymbol{0 < \beta \leq 1}$ است.

مثال ۲-۱۰ : $\boldsymbol{G}$ و $\boldsymbol{\omega_{\alpha}}$ و $6_{\boldsymbol{\beta}}$ را مانند تعریف قبل فرض کنید، در این صورت $\boldsymbol{L^{1}(G,\omega_{\alpha})}$ و $\boldsymbol{L^{1}(G,6_{\beta})}$ میانگین پذیر تقریبی کران‌دار نیستند.

برهان : اکنون تعریف می‌کنیم

$$\boldsymbol{\tau: G \longrightarrow \mathbb{N} \quad s.t \quad \tau(x) = min\{n \in \mathbb{N}\,;\, x \in U^{n}\} \quad \forall x \in G\,;}$$

این ساده است که بررسی کنید که $\boldsymbol{\tau}$ اندازه پذیر بورل است و متقارن و کران‌دار موضعی نیز هست.

$$\boldsymbol{\tau^{-1}(U) = \{x\,;\, \tau(x) \in U\} \implies \tau^{-1}(U) \in \mathfrak{m}}$$

$$\boldsymbol{U = U^{-1} \implies \tau(x^{-1}) = min\{n \in \mathbb{N}\,;\, x^{-1} \in U^{n}\} = min\{n \in \mathbb{N}\,;\, x \in U^{n}\} = \tau(x)}$$

لذا $\boldsymbol{\tau}$ متقارن است.

$\boldsymbol{\tau(U) = \{\, \tau(x)\, ;\, x \in U^{1}\} = \{\, min\{n \in \mathbb{N}\, ;\, x \in U^{n}\}\, ;\, x \in U^{1}\,\} = \{1\}}$

لذا همسایگی $\boldsymbol{U}$ حول $\boldsymbol{e}$ از $\boldsymbol{G}$ چنان وجود دارد که $\boldsymbol{\tau(U) < \infty}$ پس $\boldsymbol{\tau}$ کران‌دار موضعی است.

اگر

$$\boldsymbol{\tau(y) = min\{n \in \mathbb{N}\, ;\, y \in U^{n}\} = m_{\circ}\ ;\ \tau(x) = min\{n \in \mathbb{N}\, ;\, x \in U^{n}\} = n_{\circ}}$$

آن‌گاه

$$\boldsymbol{xy \in U^{n_{\circ}}U^{m_{\circ}} = U^{n_{\circ}+m_{\circ}} \implies \tau(xy) \le n_{\circ} + m_{\circ} \implies \tau(xy) \le \tau(x) + \tau(y)}$$

علاوه بر این $\boldsymbol{\tau(xy) \le \tau(x) + \tau(y)}$ برای هر $\boldsymbol{x, y \in G}$. در این صورت وقتی که $\boldsymbol{\alpha > \circ}$ $\boldsymbol{1 \ge \beta > \circ}$ نگاشت‌های

$$\boldsymbol{6_{\beta}(x) = e^{\tau(x)^{\beta}}}\ 6_{\beta}: \boldsymbol{G \longrightarrow (\circ, +\infty)\ \ s.t\ \ 6_{\beta}(x) = e^{\tau(x)^{\beta}}}\ ,$$

$\boldsymbol{\omega_{\alpha}(x) = (1 + \tau(x))^{\alpha}}$ وزن هایی متقارن از $\boldsymbol{G}$ هستند و از این که $\boldsymbol{G}$ فشرده نیست.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \omega_{\alpha}(x) = \lim_{x\to\infty} 6_{\beta}(x) = \infty}$$

بنابر نتیجه‌ی ۲-۸ نه $\boldsymbol{L^{1}(G, \omega_{\alpha})}$ و $\boldsymbol{L^{1}(G, 6_{\beta})}$ هیچ کدام میانگین پذیر به طور تقریبی کران‌دار نیستند. وزن‌های $\boldsymbol{\omega_{\alpha}}$ ، $\boldsymbol{6_{\beta}}$ به ترتیب وزن‌هایی چندجمله‌ای و نمایی بر $\boldsymbol{G}$ نامیده می‌شوند. حالت خاص جایی که $\boldsymbol{G = \mathbb{Z}}$ و یا $\boldsymbol{G = \mathbb{R}}$ وزن‌های چند جمله ای و نمایی قدیمی به دست می‌آیند.

فصل سوم: یک مشخصه‌سازی برای انقباض پذیری تقریبی کران‌دار

در فصول پیشین، مفاهیم بنیادی جبر باناخ، تقریب‌های همانی و خواص کران‌دار بودن آنها معرفی شد و مقدمات لازم برای بررسی انقباض‌پذیری تقریبی کران‌دار فراهم گردید. در این فصل، به بررسی عمیق‌تر ویژگی‌های ساختاری جبرهای باناخ انقباض‌پذیر تقریبی کران‌دار و ارتباط آنها با تورهای تقریبی و تقریب‌های همانی پرداخته می‌شود.

یکی از مسائل اساسی در مطالعه جبرهای باناخ، یافتن شرایطی است که تحت آن یک جبر بتواند تقریب‌های همانی کران‌دار و انقباض‌پذیر را دارا باشد. این ویژگی‌ها نه تنها برای تحلیل ساختار داخلی جبر اهمیت دارند، بلکه در کاربردهای نظری، از جمله مطالعه ایده‌آل‌های مکمل و انتقال خواص کران‌دار به زیرمجموعه‌ها، نقش حیاتی ایفا می‌کنند.

در این فصل، ابتدا تعاریف دقیق قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار و انقباض‌پذیری تقریبی کران‌دار ارائه می‌شود و سپس گزاره‌ها و قضایای معادل بودن شرایط مختلف برای انقباض‌پذیری تقریبی کران‌دار اثبات می‌گردد. برهان‌های این گزاره‌ها، بر پایه استفاده از تورهای کران‌دار و تقریب‌های همانی کران‌دار، سازوکار انتقال خواص به ایده‌آل‌ها و دوگان‌ها را روشن می‌سازد.

علاوه بر این، ارتباط میان تقریب‌های همانی چپ و راست، و نقش آنها در تضمین انقباض‌پذیری تقریبی کران‌دار مورد بحث قرار می‌گیرد. نتایج این فصل، زمینه لازم برای مطالعه دقیق‌تر جبرهای باناخ و کاربرد آنها در تحلیل ساختاری و نظریه تقریب‌ها را فراهم می‌آورد.

در نهایت، این فصل با ارائه نتایج مربوط به انتقال تقریب‌های همانی کران‌دار به ایده‌آل‌های مکمل و تعریف نگاشت‌های تصویری (Projection) پایان می‌یابد، که مبنای بسیاری از مطالعات بعدی در جبرهای باناخ و تحلیل تقریب‌ها را تشکیل می‌دهد.

۱ .تعاریف و مقدمات

در[۷،۲] ویژگی‌های مختلف از میانگین پذیری تقریبی کران‌دار و انقباض پذیر تقریبی کران‌دار به دست آمده است. در زیر ما ویژگی‌های کمی متفاوت از انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار به دست می‌آید که به اهداف این تحقیق نزدیک‌تر است.

در این جا ما یک تور $(\boldsymbol{u_i}) \subset \mathbf{A} \hat{\otimes} \mathbf{A}$ را در $\mathbf{A} \hat{\otimes} \mathbf{A}$ (منظور از $\hat{\otimes}$ حاصلضرب تنسوری تصویری است) یک قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار می‌نامیم هرگاه ثابتی وجود داشته باشد مانند $\boldsymbol{C} > \cdot$ به طوری که

$$\boldsymbol{a u_i - u_i a \to \cdot}\ ,\quad \|\boldsymbol{a u_i - u_i a}\| \le \boldsymbol{C}\|\boldsymbol{a}\|\ ,$$
$$\pi(\boldsymbol{u_i})\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{a}\ , \|\pi(\boldsymbol{u_i})\boldsymbol{a}\| \le \boldsymbol{C}\|\boldsymbol{a}\|$$
$$\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}\ \ \forall \boldsymbol{i}$$

۲ .گزاره‌ها و قضایا

گزاره‌ی ۳-۱ : فرض کنید که $\boldsymbol{A}$ یک جبر باناخ باشد در این صورت شرایط زیر با یکدیگر معادل‌اند.

۱) جبر باناخ $\boldsymbol{A}$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار است.

۲) جبر باناخ $\boldsymbol{A}$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار است.

۳) یک قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار مانند $(\boldsymbol{u_i}) \subset \mathbf{A} \hat{\otimes} \mathbf{A}$ در $\mathbf{A} \hat{\otimes} \mathbf{A}$ وجود دارد به طوری که $(\pi(\boldsymbol{u_i}))$ کران‌دار است.

برهان : ابتدا ۱$\Longleftarrow$۳ را اثبات می‌نماییم. فرض کنید که $(\boldsymbol{u_i})$ یک قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار و $(\pi(\boldsymbol{u_j}))$ کران‌دار باشد. در این صورت ما فرض می‌کنیم

$$\boldsymbol{m_{(i,j)} = u_i + (e - \pi(u_i))\otimes(e - \pi(u_j))}$$

فرض کنید که $\boldsymbol{e}$ همانی $\boldsymbol{A^{\#}}$ باشد. اکنون $\boldsymbol{m_{(i,j)}} \in \boldsymbol{A} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{A} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e}$ و ثابتی چون $\boldsymbol{C} >$ $\cdot$ وجود دارد به طوری که

$$\|\boldsymbol{f m_{(i,j)} - m_{(i,j)} f}\| \le \boldsymbol{C}\|\boldsymbol{f}\| \quad \forall \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{A^{\#}}\ \ \forall \boldsymbol{i,j}\ .$$

زیرا

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{A^{\#}} \implies \boldsymbol{fa + e}\ \|(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\lambda e})\boldsymbol{m_{(i,j)}} - \boldsymbol{m_{(i,j)}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\lambda e})\|$$

$\|(a+\lambda e)[u_i+(e-\pi(u_i))\otimes[e-\pi(u_j)]]-[u_i+(e-\pi(u_i))\otimes[e-\pi(u_j)]](a+\lambda e)\| = \|au_i+\lambda u_i+(a+\lambda e-a\pi(u_i)-\lambda\pi(u_i))\otimes(e-\pi(u_j))-[u_ia-\lambda u_i+(e-\pi(u_i))\otimes(a+\lambda e-\pi(u_i)a-\pi(u_j)\lambda)\|$

$\|au_i-u_ia+a+\lambda e-[a\pi(u_i)-\lambda\pi(u_i)][e-\pi(u_j)]+[e-\pi(u_i)][a+\lambda e-\pi(u_j)a-\pi(u_j)\lambda\| \le \|au_i-u_ia\|+\|a+\lambda e-a\pi(u_i)-\lambda\pi(u_i)\|.\|e-\pi(u_j)\|+\|e-\pi(u_i)\|.\|a+\lambda e-\pi(u_i)a-\pi(u_j)\lambda\| = \|au_i-u_ia\|+\|(a+\lambda e)(e-\pi(u_i)\|.\|e-\pi(u_j)\|+\|e-\pi(u_i)\|.\|(e-\pi(u_j)(a+\lambda e)\| \le \|au_i-u_ia\|+\|a+\lambda e\|MN+MN\|a+\lambda e\| \le S\|a\|+(\|a\|+|\lambda|)MN+MN(\|a\|+|\lambda|) = \|a\|(S+MN+MN)+|\lambda|(MN+MN) = \|a\|K+|\lambda|L \le (\|a\|+|\lambda|)C = C\|f\|$

که $C=max\{K,L\}$ است و $u_i=\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i$ پس

$\pi(u_i)=\pi(\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i)=\sum_{i=1}^{n}\pi(a_i\otimes b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i.b_i$

$\pi(m_{(i,j)})=\pi(u_i+(e-\pi(u_i))\otimes(e-\pi(u_j)))=\pi(u_i)+\pi(e\otimes e)+\pi(-\pi(u_i)\otimes e)+\pi(-e\otimes\pi(u_j))+\pi(\pi(u_i)\otimes\pi(u_j))=\pi(u_i)+e.e-\pi(u_i).e+\pi(u_i)\pi(u_j)-e.\pi(u_j)=\pi(u_i)+e.e-\pi(u_i)+\pi(u_i)\pi(u_j)-e.\pi(u_j)=e+\pi(u_i)\pi(u_j)-e.\pi(u_j) \Longrightarrow \pi(m_{(i,j)})=e+\pi(u_i)\pi(u_j)-e.\pi(u_j)$

$\lim_i \pi(m_{(i,j)})=\lim_i e+\lim_i \pi(u_i)\pi(u_j)-\lim_i \pi(u_j)=e+\pi(u_j)-\pi(u_j)=e$

$\pi(m_{(i,j)})\xrightarrow{i} e \;;\; \lim_j(\lim_i \pi(m_{(i,j)}))=\lim_j e=e$

همچنین $\pi(m_{(i,j)})=e+\pi(u_i)\pi(u_j)-\pi(u_j)$ پس $(\pi(m_{(i,j)}))$ یک تور کران‌دار با حاصلضرب ترتیبی جهت‌دار است. به آسانی دیده می‌شود که زیر تور (m_α) از $m_{(i,j)}$ وجود دارد به طوری که

$\|am_\alpha-m_\alpha a\|\to 0 \quad \forall a\in A \;;\; \pi((m_\alpha)\to e$

پس $A^{\#}$ یک قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار دارد. با استفاده از [**۲ گزاره‌ی ۲.۲**] A یک انقباض پذیر تقریبی کران‌دار است. زیرا هر جبر باناخ ، انقباض پذیر تقریبی کران‌دار است اگر وتنها اگر دوگان آن دارای قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار باشد.

اکنون ما نشان می‌دهیم که ۱ ، ۲ را نتیجه می‌دهد. اگر $\boldsymbol{A}$ انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار باشد، آن‌گاه $\boldsymbol{A}$ یک تقریب همانی کران‌دار دارد که آن را با $(\boldsymbol{e_\alpha})$ نشان می‌دهیم [**۲ نتیجه‌ی ۴.۳**] . بنابر قضیه ای برای هر جبر باناخ انقباض پذیر تقریبی کران‌دار ثابتی چون $\boldsymbol{C > 0}$ و تورهایی مانند

$(\boldsymbol{M_i}) \subseteq \mathbf{A} \hat{\otimes} \mathbf{A}$ و $(\boldsymbol{F_i})$ و$(\boldsymbol{G_i})$ در $\boldsymbol{A}$ چنان وجود دارند که

الف) $\boldsymbol{\pi(M_i) = F_i + G_i}$

ب) $\boldsymbol{aF_i \to \kappa(a)}$ برای هر $\boldsymbol{a \in A}$.

پ) $\boldsymbol{\|aF_i\| \le C\|a\|}$ برای هر $\boldsymbol{a \in A}$ و هر $\boldsymbol{i}$.

ت) $\boldsymbol{G_i a \to \kappa(a)}$ برای هر $\boldsymbol{a \in A}$.

ث) $\boldsymbol{\|G_i a\| \le C\|a\|}$ برای هر $\boldsymbol{a \in A}$ و هر $\boldsymbol{i}$.

ج) $\boldsymbol{aM_i - M_i a - a\otimes G_i + F_i\otimes a \to 0}$ برای هر $\boldsymbol{a \in A}$.

چ) $\boldsymbol{\|aM_i - M_i a - a\otimes G_i + F_i\otimes a\| \le C\|a\|}$برای هر $\boldsymbol{a \in A}$ وهر $\boldsymbol{i}$.

و در [**۲ قضیه‌ی ۳.۳**] ثابت می‌شود که هر جبر باناخ میانگین پذیر تقریبی کران‌دار اگر دارای تقریب های همانی ضربگر-کران‌دار چپ و راست باشد آنگاه دارای تقریب همانی کران‌دار است. پس هر جبر باناخ انقباض پذیرتقریبی کران‌دار دارای تقریب های همانی ضربگر-کران‌دار چپ و راست می باشد. فرض کنید که $(\boldsymbol{m_\alpha})$ در $\boldsymbol{A^\#} \hat{\otimes} \boldsymbol{A^\#}$ یک قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار برای $\boldsymbol{A^\#}$ باشد. می‌توانیم فرض کنیم که $\pi((\boldsymbol{m_\alpha}) = \boldsymbol{e}$ و بنابر این ما می‌توانیم بنویسیم :

$$\boldsymbol{m_\alpha = M_\alpha - F_\alpha\otimes e - e\otimes G_\alpha + e\otimes e}$$

$$\pi(\boldsymbol{m_\alpha}) = \boldsymbol{\pi(M_\alpha - F_\alpha\otimes e - e\otimes G_\alpha + e\otimes e)}$$

$$\pi(\boldsymbol{m_\alpha}) = \boldsymbol{\pi(\sum_{i=1}^{\infty} ((a_i^\alpha + \lambda_i^\alpha e)\otimes(b_i^\alpha + \mu_i^\alpha e))) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi\big((a_i^\alpha + \lambda_i^\alpha e)\otimes(b_i^\alpha + \mu_i^\alpha e)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^\alpha + \lambda_i^\alpha e).(b_i^\alpha + \mu_i^\alpha e) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^\alpha b_i^\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha b_i^\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^\alpha a_i^\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i^\alpha \mu_i^\alpha)e \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha b_i^\alpha = G_\alpha \ ; \ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^\alpha a_i^\alpha = F_\alpha \ ; \ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha \mu_i^\alpha = 1}$$

که در آن $\boldsymbol{M_\alpha \in A \hat{\otimes} A \ F_\alpha, G_\alpha \in A}$

$$\boldsymbol{am_\alpha - m_\alpha a \to 0 \quad \exists C > 0 \ \ s.t \ \ \|aM_\alpha - M_\alpha a\| \le C\|a\| \ \ \forall \alpha \ , \ \forall a \in A}$$

$$\boldsymbol{am_\alpha - m_\alpha a \to 0 \implies aM_\alpha - aF_\alpha\otimes e - ae\otimes G_\alpha + ae\otimes e - M_\alpha a + F_\alpha\otimes ea + e\otimes G_\alpha a - e\otimes ea \to 0 \implies aM_\alpha - aF_\alpha\otimes e - a\otimes G_\alpha + a\otimes e - M_\alpha a + F_\alpha\otimes a +}$$

$$e\otimes G_\alpha a - e\otimes a \to \cdot \implies -aF_\alpha\otimes e + a\otimes e + e\otimes G_\alpha a - e\otimes a \to \cdot \implies -aF_\alpha\otimes e + e\otimes G_\alpha a \to a\otimes e - e\otimes a \implies e\otimes G_\alpha a - aF_\alpha\otimes e \to -(a\otimes e - e\otimes a) \implies e\otimes G_\alpha a - aF_\alpha\otimes e \to e\otimes a - a\otimes e \implies G_\alpha a \to a\,,\ aF_\alpha \to a$$

$$\|am_\alpha - m_\alpha a\| \le D\|a\| \implies \|aM_\alpha - aF_\alpha\otimes e - ae\otimes G_a + ae\otimes e - M_\alpha a + F_\alpha\otimes ea + e\otimes G_\alpha a - e\otimes ea\| = \|aM_\alpha - aF_\alpha\otimes e - a\otimes G_a + a\otimes e - M_\alpha a + F_\alpha\otimes a + e\otimes G_\alpha a - e\otimes a\| \le D\|a\|$$

$$\|aM_\alpha - aF_\alpha\otimes e - a\otimes G_a + a\otimes e - M_\alpha a + F_\alpha\otimes a + e\otimes G_\alpha a - e\otimes a\| \le \|-aF_\alpha\otimes e + a\otimes e + e\otimes G_\alpha a - e\otimes a\| + \|aM_\alpha - M_\alpha a - a\otimes G_\alpha + F_\alpha\otimes a\| \le \|aM_\alpha - M_\alpha a - a\otimes G_\alpha + F_\alpha\otimes a\| + \|-aF_\alpha\otimes e + a\otimes e\| + \|e\otimes G_\alpha a - e\otimes a\| \le D\|a\| \implies \exists C^{\sim} > \cdot\ s.t\ \|aF_\alpha\| \le C^{\sim}\|a\|\,;\ \|G_\alpha a\| \le C^{\sim}\|a\|\ ;\ a\otimes e - e\otimes a \to \cdot$$

$$\|aM_\alpha - M_\alpha a - a\otimes G_\alpha + F_\alpha\otimes a\| \to \cdot \quad aF_\alpha \to a\ ;\ G_\alpha a \to a$$

و ثابت مثبتی مانند $C^{\sim} > \cdot$ وجود دارد به طوری که

$$\|aM_\alpha - M_\alpha a - a\otimes G_\alpha + F_\alpha\otimes a\| \le C^{\sim}\|a\|\,;\ \|aF_\alpha\| \le C^{\sim}\|a\|\,;\|G_\alpha a\| \le C^{\sim}\|a\|\quad \forall \alpha, a \in A$$

پس (F_α) و (G_α) تقریب های همانی ضربگر-کران‌دار چپ و راست A هستند. از این که A دارای تقریب همانی کران‌دار می‌باشد پس باید کران‌دار باشد. اکنون تعریف می‌کنیم تور $(U_{(\alpha,\beta)})$ را در $A\hat{\otimes}A$ که

$$U_{(\alpha,\beta)} = M_\alpha - F_\alpha\otimes e_\beta - e_\beta\otimes G_\alpha + e_\beta\otimes e_\beta$$

$$\|aU_{(\alpha,\beta)} - U_{(\alpha,\beta)}a\| = \|aM_\alpha - aF_\alpha\otimes e_\beta - ae_\beta\otimes G_\alpha + ae_\beta\otimes e_\beta - M_\alpha a + F_\alpha\otimes e_\beta a + e_\beta\otimes G_\alpha a - e_\beta\otimes e_\beta a\| \le \|aM_\alpha - M_\alpha a - a\otimes G_\alpha + F_\alpha\otimes a\| + \le \|-aF_\alpha\otimes e_\beta + a\otimes e_\beta + e_\beta\otimes G_\alpha a - e_\beta\otimes a\| \le C^{\sim}\|a\| + \|-aF_\alpha\otimes e_\beta + a\otimes e_\beta + e_\beta\otimes G_\alpha a - e_\beta\otimes a\|\|a\| = C^{\sim}\|a\| + \|-aF_\alpha\|\|e_\beta\| + \|a\|\|e_\beta\| + \|e_\beta\|\|G_\alpha a\| + \|-e_\beta\|\|a\| \le (C^{\sim} + M)\|a\|$$

$$\lim_{(\alpha,\beta)}(aU_{(\alpha,\beta)} - U_{(\alpha,\beta)}a) = \lim_{(\alpha,\beta)}\big(aM_\alpha - aF_\alpha\otimes e_\beta - ae_\beta\otimes G_a + ae_\beta\otimes e_\beta - M_\alpha a + F_\alpha\otimes e_\beta a + e_\beta\otimes G_\alpha a - e_\beta\otimes e_\beta a\big)$$

$$= \lim_{(\alpha,\beta)}(aM_\alpha - M_\alpha a - a\otimes G_\alpha + F_\alpha\otimes a)$$
$$+ \lim_{(\alpha,\beta)}(-aF_\alpha\otimes e_\beta + a\otimes e_\beta + e_\beta\otimes G_\alpha a - e_\beta\otimes a)$$
$$= \lim_{(\alpha,\beta)}(aM_\alpha - M_\alpha a - a\otimes G_\alpha + F_\alpha\otimes a)$$
$$+ (-a\otimes e_\beta + a\otimes e_\beta - e_\beta\otimes a + e_\beta\otimes a)$$
$$= \cdot + (-a\otimes e_\beta + a\otimes e_\beta - e_\beta\otimes a + e_\beta\otimes a) = \cdot$$

$$\pi(U_{(\alpha,\beta)})a = \pi\big(M_\alpha - F_\alpha\otimes e_\beta - e_\beta\otimes G_a + e_\beta\otimes e_\beta\big)a$$
$$= \pi(M_\alpha)a - \pi\big(F_\alpha\otimes e_\beta\big)a - \pi\big(e_\beta\otimes G_a\big)a + \pi\big(e_\beta\otimes e_\beta\big)a$$
$$= \pi(M_\alpha)a - F_\alpha.e_\beta a - e_\beta.G_a a + e_\beta.e_\beta a$$
$$= \pi(m_\alpha + F_\alpha\otimes e + e\otimes G_\alpha - e\otimes e)a - \pi\big(F_\alpha\otimes e_\beta\big)a - \pi\big(e_\beta\otimes G_a\big)a$$
$$+\pi\big(e_\beta\otimes e_\beta\big)a$$
$$= \pi(m_\alpha)a + F_\alpha.ea + e.G_\alpha a - e.ea - F_\alpha.e_\beta a - e_\beta.G_a a + e_\beta.e_\beta a$$
$$= ea + F_\alpha.ea + e.G_\alpha a - e.ea - F_\alpha.e_\beta a - e_\beta.G_a a + e_\beta.e_\beta a \longrightarrow ea = a$$

$$\|\pi(U_{(\alpha,\beta)})a\| = \|ea + F_\alpha.ea + e.G_\alpha a - e.ea - F_\alpha.e_\beta a - e_\beta.G_a a + e_\beta.e_\beta a\|$$
$$= \|(e.e + F_\alpha.e + e.G_\alpha - e.e - F_\alpha.e_\beta - e_\beta.G_a + e_\beta.e_\beta)a\|$$
$$\le \|e.e + F_\alpha.e + e.G_\alpha - e.e_\beta - F_\alpha.e_\beta - e_\beta.G_a + e_\beta.e\|\|a\|$$
$$\le N\|a\|$$

پس به آسانی می‌توان آزمایش کرد که زیر تور $(U_{(\alpha,\beta)})$ یک قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار برای A است.

پس ۲⟸۱ اثبات شده است. در پایان اگر ۲ نتیجه دهد که (U_α) یک قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار برای A است آن‌گاه $(\pi(U_\alpha))$ یک تقریب همانی ضربگر-کران‌دار برای A است. که باید کران‌دار باشد زیرا A دارای یک تقریب همانی کران‌دار است به وسیله‌ی فرض، پس ۳⟸۲ اثبات می‌شود.

نتیجه‌ی ۳-۲ : فرض کنید که A انقباض پذیر به طور تقریبی کران‌دار باشد و فرض کنید که J ایده‌آل بسته چپ [راست] از A باشد. اگر J مکمل شده در A باشد. در این صورت J تقریب همانی راست

[چپ] ضربگر-کران‌دار دارد که تور (p_i) در J و یک ثابت c چنان وجود دارند که

$$rp_i \to r \;;\quad \|rp_i\| \le c\|r\| \quad [p_i r \to r \quad \|p_i r\| \le c\|r\|] \quad \forall r \in J.$$

برهان : در حالتی که $\boldsymbol{J}$ ایده‌آل چپ باشد قضیه را اثبات می‌نماییم و در حالتی که $\boldsymbol{J}$ ایده‌آل راست باشد به طور مشابه ثابت می‌شود.

فرض کنید که $(\boldsymbol{U_i})$ در $\boldsymbol{A \hat{\otimes} A}$ یک قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار برای $\boldsymbol{A}$ باشد به طوری که $(\boldsymbol{\pi(U_i)})$ کران‌دار باشد. در این صورت

$$\exists \boldsymbol{I \preccurlyeq A \;\; s.t \;\; A = I \oplus J \;\; \Longrightarrow}$$
$$\boldsymbol{\forall a \in A \; \exists i_a \in I \, , \exists j_a \in J \;\; s.t \;\; a = i_a + j_a \; P: A \longrightarrow J \;\; s.t \; P(a) = j_a}$$
$$\boldsymbol{a = b \;\Longrightarrow\; b = i_a + j_a \; ; \; P(b) = P(i_a + j_a) = j_a \; = P(a)}$$
$$\boldsymbol{(POP)(a) = P\big(P(a)\big) = P(j_a) = j_a \; = P(a) \;\Longrightarrow\; P\big(P(a)\big) = P(a)}$$

فرض کنید که $\boldsymbol{P: A \longrightarrow J}$ یک نگاشت پیوسته‌ی تصویری باشد تعریف می‌کنیم،

$$\boldsymbol{\psi: A \hat{\otimes} A \longrightarrow J \quad s.t \;\; \psi(a \otimes b) = aP(b)}$$
$$\boldsymbol{\forall a, b \in A}$$
$$\boldsymbol{\exists \varphi: A \times A \longrightarrow J \quad s.t \;\; \varphi(a,b) = aP(b) \; ; \; a = c \, , b = d \;\Longrightarrow\; aP(b) = cP(d) \;\Longrightarrow\; \varphi(a,b) = \varphi(c,d)}$$
$$\boldsymbol{\varphi(a, \lambda b + c) = aP(\lambda b + c) = a(\lambda P(b) + P(c)) = a\lambda P(b) + aP(c) = \lambda \varphi(a,b) + \varphi(a,c)}$$
$$\boldsymbol{\varphi(\lambda a + x, b) = (\lambda a + x)P(b) = \lambda aP(b) + xP(b) = \lambda \varphi(a,b) + \varphi(x,b)}$$
$$\boldsymbol{\psi(ra \otimes b) = raP(b) = r\psi(a \otimes b) \;\Longrightarrow\; \psi(rui) = r\psi(ui) \quad \forall r \in J}$$
$$\boldsymbol{r\psi(u_i) = r\psi(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i) = r \sum_{i=1}^{\infty} \psi(a_i \otimes b_i) = r \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} r a_i P(b_i)}$$
$$\boldsymbol{\pi(u_i)r + \psi(ru_i - u_i r) = \pi(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i)r + \psi(r \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i r) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, . \, b_i r + \sum_{i=1}^{\infty} r a_i \, P(b_i) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, P(b_i r) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, . \, b_i r + \sum_{i=1}^{\infty} r a_i \, P(b_i) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \, b_i r = \sum_{i=1}^{\infty} r a_i P(b_i) \;\Longrightarrow\; r\psi(u_i) = \pi(u_i)r + \psi(ru_i - u_i r)}$$

از آنجایی که $\boldsymbol{P}$ پوشا و پروژکتیو [$\boldsymbol{PoP(a) = P(a) \;\; \forall a \in A}$] است. پس

$$\boldsymbol{\forall r \in J \quad \exists a \in A \;\; s.t \; P(a) = r \;\; ; \;\; P(r) = P\big(P(a)\big) = (PoP)(a) = P(a) = r \;\Longrightarrow P(r) = r \; ; \; b_i \in A \; , r \in J \, , J \preccurlyeq A \;\Longrightarrow b_i r \in J \;\Longrightarrow P(b_i r) = b_i r}$$
$$\boldsymbol{r\psi(u_i) = \pi(u_i)r + \psi(ru_i - u_i r) \; \forall r \in J \quad ; \;\; \psi(u_i) \in J \quad ; \;\; p_i = \psi(u_i)}$$
$$\boldsymbol{\forall a \in A \;\; au_i - u_i a \longrightarrow \cdot \; ; r \in J \preccurlyeq A \;\;\Longrightarrow\;\; ru_i - u_i r \to \cdot}$$

از این که $\boldsymbol{\psi}$ پیوسته است نتیجه می‌شود که $\boldsymbol{\psi(ru_i - u_ir) \to 0}$ و

$$\forall \boldsymbol{a \in A} \ , \ \boldsymbol{\pi(u_i)a \to a}$$

لذا $\boldsymbol{\pi(u_i)r \to r}$ بنابر این $\boldsymbol{r\psi(u_i) \to r}$ پس $\boldsymbol{rp_i \to r}$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{rp_i}\| = \|\boldsymbol{\pi(u_i)r + \psi(ru_i - u_ir)}\| &\leq \|\boldsymbol{\pi(u_i)r}\| + \|\boldsymbol{\psi(ru_i - u_ir)}\| \\ &\leq \boldsymbol{C}\|\boldsymbol{r}\| + \|\boldsymbol{\psi(ru_i - u_ir)}\| \leq \boldsymbol{C}\|\boldsymbol{r}\| + \boldsymbol{D}\|\boldsymbol{r}\| = (\boldsymbol{C + D})\|\boldsymbol{r}\| \\ &= \boldsymbol{c}\|\boldsymbol{r}\|\end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که $(\boldsymbol{p_i})$ در $\boldsymbol{J}$ یک تقریب همانی ضربگر-کران‌دار راست برای $\boldsymbol{J}$ است.

فصل چهارم: جبرهای برلینگ بر شبه SIN–گروه‌ها

در مطالعه‌ی ساختارهای جبری و تحلیلی گروه‌ها و فضای‌های تابع، به ویژه در زمینه‌ی گروه‌های شبهSIN ، جبرهای برلینگ نقش اساسی و بنیادینی ایفا می‌کنند. این جبرها، که با ترکیب عملیات‌های کانولوشن[۱] و توابع وزن‌دار تعریف می‌شوند، امکان تحلیل دقیق تعاملات میان توابع، توزیع‌ها و مدول‌های دوطرفه را فراهم می‌آورند. شناخت دقیق این جبرها نه تنها به درک رفتار گروه‌های شبه SIN کمک می‌کند، بلکه در توسعه نظریه‌های هارمونی، تحلیل تابعی و توپولوژی گروهی نیز اهمیت ویژه‌ای دارد.

یکی از نکات کلیدی در این زمینه، بررسی عمل‌های راست و چپ بر فضاهای L^1 و L^∞ با وزن مناسب و نحوه‌ی بسط این عملیات‌ها به مدول‌های دوطرفه و فضای توزیعی $M(G\times G, \omega\times\omega)$ است. این ساختارها به ما اجازه می‌دهند تا مفهوم تقریب همانی کران‌دار شبه‌مرکزی و روابط آن با شبه-SIN گروه‌ها را دقیقاً تعریف و تحلیل کنیم.

در این فصل، ابتدا نشان داده می‌شود که تنسور فضای L^1 با خود، یعنی $L^1(G,\omega)\hat{\otimes} L^1(G,\omega)$ ، با فضای $L^1(G\times G,\omega\times\omega)$ همریخت است و این همریختی، پایه‌ی تعریف عمل‌های مدول راست و چپ را فراهم می‌آورد. سپس با معرفی خودریختی‌های مناسب در فضای $C_0(G\times G, 1/(\omega\times\omega))$ و بررسی خواص آن‌ها، امکان تعریف دقیق و بررسی تعامل مدول‌ها فراهم می‌شود. در ادامه، با بهره‌گیری از تقریب همانی کران‌دار شبه‌مرکزی، رفتار مدول‌ها و توزیع‌های مربوط به گروه‌های شبه SIN تحلیل می‌شود.

هدف اصلی این فصل، ارائه‌ی چارچوبی جامع برای مطالعه‌ی جبرهای برلینگ بر شبه-SIN گروه‌ها، بررسی خواص مدول‌های دوطرفه و نشان دادن نقش تقریب همانی کران‌دار شبه‌مرکزی در تحلیل این ساختارها است. این مباحث، علاوه بر ارزش نظری، در کاربردهای تحلیل هارمونی، تئوری نمایندگی و تحلیل توزیعی گروه‌ها نیز اهمیت دارند.

---

۱ - به معنای پیچش و مکمل ایده آل این نیست.

عمل‌های طبیعی راست و چپ از $L^1(G,\omega)$ در فضای

$L^1(G,\omega)\hat{\otimes}L^1(G,\omega)\cong L^1(G\times G,\omega\times\omega)$

عمل‌های راست و چپ از $L^1(G,\omega)$ در $L^\infty(G\times G,\frac{1}{\omega\times\omega})$ را تعریف می‌کنیم. فضای $C_.(G\times G,\frac{1}{\omega\times\omega})$ یک زیر مدول از $L^\infty(G\times G,\frac{1}{\omega\times\omega})$ برای عمل‌های دوگان شده است ، که این با فرمول‌های زیر به دست می‌آید.

$$f.\Phi(x,y)=\int_G^{\square}\Phi(x,yz)f(z)\,dz\ \ ;\ \ \Phi.f(x,y)=\int_G^{\square}\Phi(zx,y)f(z)\,dz$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $L^1(G,\omega)\hat{\otimes}L^1(G,\omega)\cong L^1(G\times G,\omega\times\omega)$

$\exists\theta: L^1(G,\omega)\times L^1(G,\omega)\to L^1(G\times G,\omega\times\omega)\quad \theta(f,g)(x,y)=f(x)g(y)$

$(f,g)=(h,j)\implies \forall(x,y)\in G\times G\ \ (f,g)(x,y)=(h,j)(x,y)\implies f(x)=h(x),g(y)=j(y)\Rightarrow f(x)g(y)=h(x)j(y)\implies \theta(f,g)(x,y)=\theta(h,j)(x,y)\implies \theta(f,g)=\theta(h,j)$

$$\begin{aligned}\theta(f,g+h)(x,y)&=f(x)(g+h)(y)=f(x)(g(y)+h(y))\\&=f(x)g(y)+f(x)h(y)=\theta(f,g)(x,y)+\theta(f,h)(x,y)\\&=(\theta(f,g)+\theta(f,h))(x,y)\implies\theta(f,g+h)\\&=\theta(f,g)+\theta(f,h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta(f+g,h)(x,y)&=(f+g)(x)h(y)=\big(f(x)+g(x)\big)h(y)\\&=f(x)h(y)+g(x)h(y)=\theta(f,h)(x,y)+\theta(g,h)(x,y)\\&=\big(\theta(f,h)+\theta(g,h)\big)(x,y)\Rightarrow\theta(f+g,h)=\theta(f,h)+\theta(g,h)\end{aligned}$$

$\forall\alpha\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\theta(\alpha f,g)(x,y)&=\alpha f(x)g(y)=\alpha\theta(f,g)(x,y)=\alpha(\theta(f,g))(x,y)\implies\theta(\alpha f,g)\\&=\alpha\theta(f,g)\end{aligned}$$

$\theta(f,\alpha g)(x,y)=f(x)\alpha g(y)=\alpha f(x)g(y)=\alpha\theta(f,g)(x,y)=\alpha(\theta(f,g))(x,y)\implies\theta(f,\alpha g)=\alpha\theta(f,g)$

اکنون بنابر قضیه‌ی اساسی تنسور نگاشت

چنان وجود دارد که $\psi: L^1(G,\omega)\hat{\otimes}L^1(G,\omega)\to L^1(G\times G,\omega\times\omega)$

$\psi(f\otimes g)(x,y)=f(x)g(y)$

$\psi: L^1(G,\omega)\hat{\otimes}L^1(G,\omega)\to L^1(G\times G,\omega\times\omega)\quad s.t\quad \psi(f\otimes g)=\theta(f,g)$

$\psi(f\otimes g)(x,y)=\theta(f,g)(x,y)=f(x)g(y)\ \ i.e\ \ \psi(f\otimes g)(x,y)=f(x)g(y)\Rightarrow$

$\psi\big(f\otimes(g+h)\big)=\psi(f\otimes g)+\psi(f\otimes h)\,;\psi\big((f+g)\otimes h\big)=\psi(f\otimes h)+\psi(g\otimes h)\;;\psi(\alpha f\otimes g)=\alpha\psi(f\otimes g)\,;\;\psi(f\otimes\alpha g)=\alpha\psi(f\otimes g)$

$$\psi((f\otimes h)(g\otimes k))(x,y)=\theta((f,h)(g,k))(x,y)=\theta(fg,hk)(x,y)$$
$$=(fg)(x)(hk)(y)=f(x)g(x)h(y)k(y)=f(x)h(y)g(x)k(y)$$
$$=\theta(f,h)(x,y)\theta(g,k)(x,y)=(\theta(f,h)\theta(g,k))(x,y)$$
$$\Longrightarrow\ \theta((f,h)(g,k))=\theta(f,h)\theta(g,k))\ \Longrightarrow\ \psi((f\otimes h)(g\otimes k))$$
$$=\psi(f\otimes h)\psi(g\otimes k)$$

$\psi(f\otimes g)=\psi(h\otimes k)\Longrightarrow\psi(f\otimes g)(x,y)=\psi(h\otimes k)(x,y)\Longrightarrow f(x)g(y)=h(x)k(y)\Longrightarrow f(x)=h(x),g(y)=k(y)\ \Longrightarrow f=h\,,g=k\ \Longrightarrow\ f\otimes g=h\otimes k\ \Longrightarrow\ \psi:1-1$

بنابر [۲۲] نگاشت ψ پوشا می‌باشد.

$$\psi(f\otimes g)(x,y)=f(x)g(y)$$

پس ψ یک به یک و پوشا و دوخطی و خوشتعریف است و ضرب را به ضرب می‌برد. پس بین دامنه و برد ψ یکریختی برقرار است.

$$L^1(G,\omega)\hat{\otimes}L^1(G,\omega)\cong L^1(G\times G,\omega\times\omega)$$
$$(f.\Phi)(g)=\Phi(g*f)$$
$$(\Phi.f)(g)=\Phi(f*g)$$

$$f.\Phi(x,y)=\int_G^{\square}\Phi(x,yz)f(z)\,dz\ \ ;\ \ \Phi.f(x,y)=\int_G^{\square}\Phi(zx,y)f(z)\,dz$$
$$\forall f\in L^1(G,\omega)\ \forall\Phi\in C_0(G\times G,\tfrac{1}{\omega\times\omega})\ \ \forall x,y\in G$$
$$\tfrac{1}{\omega\times\omega}\Phi:G\times G\longrightarrow[0,+\infty)\ \forall\varepsilon>0\ \ \exists K\ \ \forall x,y\in G\ \ \left\|\tfrac{1}{\omega\times\omega}(x,y)\Phi(x,y)\right\|<\varepsilon$$
$$i.e\ \ \tfrac{1}{\omega\times\omega}\Phi\in C_0(G\times G)\ \ ;\ \ \omega f\in L^1(G)\ i.e$$
$$\int_G^{\square}\omega(t)f(t)\,dt<\infty$$

خود ریختی T را در $C_0(G\times G,\frac{1}{\omega\times\omega})$ به این شکل تعریف می‌نماییم:

$$T:C_0(G\times G,\tfrac{1}{\omega\times\omega})\longrightarrow C_0(G\times G,\tfrac{1}{\omega\times\omega})\qquad T(\Phi)(x,y)=\Phi(y,x)$$
$$\Phi=\psi\ \Longrightarrow\ \forall(x,y)\in G\times G\ \ \Phi(x,y)=\psi(x,y)\ \Rightarrow\ \Phi(y,x)=\psi(y,x)\ \Longrightarrow$$
$$T(\Phi)(x,y)=T(\psi)(x,y)\ \Longrightarrow\ \ T(\Phi)=T(\psi)$$

$$\|\Phi\| = \sup_{x,y\in G}\|\Phi(y,x)\| = \sup_{x,y\in G}\|T(\Phi)(x,y)\| = \|T(\Phi)\|$$

$$\forall \Phi(y,x) \in \mathbb{C} \quad \exists (x,y) \in G\times G \quad s.t\ T(\Phi)(x,y) = \Phi(y,x)$$

$$T(\Phi) = T(\psi) \implies \forall (x,y)\in G\times G\ T(\Phi)(x,y) = T(\psi)(x,y) \implies$$

$$\Phi(y,x) = \psi(y,x) \implies \Phi = \psi \implies T: ۱-۱$$

پس T پوشا و یک به یک و خوشتعریف است.

همچنین برای هر $\Phi,\psi \in C_{\cdot}(G\times G, \frac{۱}{\omega\times\omega})$ داریم:

$$T(\alpha\Phi+\psi)(x,y) = (\alpha\Phi+\psi)(y,x) = \alpha\Phi(y,x)+\psi(y,x) = \alpha T(\Phi)(x,y) +$$
$$T(\psi)(x,y) = [\alpha T(\Phi)+T(\psi)](x,y) \implies T(\alpha\Phi+\psi) = \alpha T(\Phi)+T(\psi)$$
$$T(\Phi\psi)(x,y) = (\Phi\psi)(y,x) = \Phi(y,x)\psi(y,x) = T(\Phi)(x,y)T(\psi)(x,y) =$$
$$[T(\Phi)T(\psi)](x,y) \implies T(\Phi\psi) = T(\Phi)T(\psi) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}\ ,$$

پس T همریختی نیز هست.

$$\forall x,y \in G \quad \forall \Phi \in C_{\cdot}(G\times G, \frac{۱}{\omega\times\omega}) \quad ;$$

تعریف می‌کنیم :

$$f o \Phi = T(f.T(\Phi)) \ ; \ \Phi o f = T(T(\Phi).f)$$

عمل ترکیب توابع در $C_{\cdot}(G\times G, \frac{۱}{\omega\times\omega})$

فرمول های عمل‌های $L^{۱}(G,\omega)$ باناخ دو مدول در $C_{\cdot}(G\times G, \frac{۱}{\omega\times\omega})$ عمل‌های مدول هستند. و o (عمل ترکیب توابع) با عمل ضرب ترکیب شده و دارای قابلیت جا به جایی است. باید نشان دهیم

$$f.(g.\Phi) = (f*g).\Phi \ ; f.(\Phi+\psi) = f.\Phi + f.\psi \ ;$$
$$(f+g).\Phi = f.\Phi + g.\Phi$$
$$(\Phi.g).f = \Phi.(f*g) \ ; (\Phi+\psi).f = \Phi.f+\psi.f \ ;$$
$$\Phi.(f+g) = \Phi.f+\Phi.g$$
$$fo(go\Phi) = (f*g)o\Phi \ ; \ fo(\Phi+\psi) = fo\Phi + fo\psi \ ;$$
$$(f+g)o\Phi = fo\Phi + go\Phi$$
$$(\Phi og)of = \Phi o(f*g) \ ; \ (\Phi+\psi)of = \Phi of + \psi of \ ;$$
$$\Phi o(f+g) = \Phi of + \Phi og$$

$$f.(\Phi+\psi)(x,y)=\int_G^{\square}(\Phi+\psi)(x,yz)f(z)\,dz=\int_G^{\square}\Phi(x,yz)f(z)\,dz+$$
$$\int_G^{\square}\psi(x,yz)f(z)\,dz=f.\Phi(x,y)+f.\psi(x,y)=(f.\Phi+f.\psi)(x,y)\implies f.(\Phi+$$
$$\psi)=f.\Phi+f.\psi$$
$$(f+g).\Phi(x,y)=\int_G^{\square}\Phi(x,yz)(f+g)(z)\,dz=\int_G^{\square}\Phi(x,yz)f(z)\,dz+$$
$$\int_G^{\square}\Phi(x,yz)g(z)\,dz=f.\Phi(x,y)+g.\Phi(x,y)=(f.\Phi+g.\Phi)(x,y)\implies$$
$$(f+g).\Phi=f.\Phi+g.\Phi$$

$$(f*g).\Phi=\int_G^{\square}\Phi(x,yz)(f*g)(z)\,dz=\int_G^{\square}\Phi(x,yz)\int_G^{\square}f(t)g(t^{-1}z)dtdz=$$
$$\int_{G^2}^{\square}\Phi(x,yz)f(t)g(t^{-1}z)dtdz=f.(g.\Phi)(x,y)=\int_G^{\square}(g.\Phi)(x,yz)f(z)dz=$$
$$\int_G^{\square}\int_G^{\square}\Phi(x,yzt)g(t)dtf(z)dz=\int_{G^2}^{\square}\Phi(x,yzt)g(t)f(z)dtdz=f.(g.\Phi)$$

$$\big((\Phi+\psi).f\big)(x,y)=\int_G^{\square}(\Phi+\psi)(zx,y)f(z)\,dz=\int_G^{\square}\Phi(zx,y)f(z)\,dz+$$
$$\int_G^{\square}\psi(zx,y)f(z)\,dz=(\Phi.f)(x,y)+(\psi.f)(x,y)=(\Phi.f+\psi.f)(x,y)\implies$$
$$(\Phi+\psi).f=\Phi.f+\psi.f$$

$$\big(\Phi.(f+g)\big)(x,y)=\int_G^{\square}\Phi(zx,y)(f+g)(z)\,dz=\int_G^{\square}\Phi(zx,y)f(z)\,dz+$$
$$\int_G^{\square}\Phi(zx,y)g(z)\,dz=(\Phi.f)(x,y)+(\Phi.g)(x,y)=(\Phi.f+\Phi.g)(x,y)\implies$$
$$\Phi.(f+g)=\Phi.f+\Phi.g$$

$$\big(\Phi.(f*g)\big)(x,y)=$$
$$\int_G^{\square}\Phi(zx,y)(f*g)(z)\,dz=\int_G^{\square}\Phi(zx,y)\int_G^{\square}f(t)gg(t^{-1}z)dt\,dz=$$
$$\int_{G^2}^{\square}\Phi(zx,y)f(t)g(t^{-1}z)dtdz$$

$$\big((\Phi.f).g\big)(x,y)=\int_G^{\square}(\Phi.f)(zx,y)g(z)dz=\int_G^{\square}\int_G^{\square}\Phi(tzx,y)f(t)dtg(z)dz=\int_{G^2}^{\square}\Phi(tzx,y)f(t)g(z)dt\,dz$$

$$fo(\Phi+\psi))(x,y)=T(f.T(\Phi+\psi))(x,y)=(f.T(\Phi+\psi))(y,x)=\int_G^{\square}T(\Phi+\psi)(y,xz)f(z)dz=\int_G^{\square}(\Phi+\psi)(xz,y)f(z)dz=\int_G^{\square}\Phi(xz,y)f(z)dz+\int_G^{\square}\psi(xz,y)f(z)dz=\int_G^{\square}T(\Phi)(y,xz)f(z)dz+\int_G^{\square}T(\psi)(y,xz)f(z)dz=\big(f.T(\Phi)\big)(y,x)+\big(f.T(\psi)\big)(y,x)=T\big(f.T(\Phi)\big)(x,y)+T\big(f.T(\psi)\big)(x,y)=(fo\Phi)(x,y)+(fo\psi)(x,y)=(fo\Phi+fo\psi)(x,y)\implies fo(\Phi+\psi)=fo\Phi+fo\psi$$

$$((f+g)o\Phi)(x,y)=T((f+g).T(\Phi))(x,y)=((f+g).T(\Phi))(y,x)=\int_G^{\square}T(\Phi)(y,xz)(f+g)(z)dz=\int_G^{\square}\Phi(xz,y)(f+g)(z)dz=\int_G^{\square}\Phi(xz,y)f(z)dz+\int_G^{\square}\Phi(xz,y)g(z)dz=\int_G^{\square}T(\Phi)(y,xz)f(z)dz+\int_G^{\square}T(\Phi)(y,xz)g(z)dz=(f.T(\Phi))(y,x)+(g.T(\Phi))(y,x)=T(f.T(\Phi))(x,y)+T(g.T(\Phi))(x,y)=(fo\Phi)(x,y)+(go\Phi)(x,y)=(fo\Phi+go\Phi)(x,y)\implies(f+g)o\Phi=fo\Phi+go\Phi$$

$$((\Phi+\psi)of)(x,y)=T(T(\Phi+\psi).f)(x,y)=(T(\Phi+\psi).f)(y,x)=\int_G^{\square}T(\Phi+\psi)(zy,x)f(z)dz=\int_G^{\square}(\Phi+\psi)(x,zy)f(z)dz=\int_G^{\square}\Phi(x,zy)f(z)\,dz+\int_G^{\square}\psi(x,zy)f(z)\,dz=\int_G^{\square}T(\Phi)(zy,x)f(z)\,dz+\int_G^{\square}T(\psi)(zy,x)f(z)dz=(T(\Phi).f)(y,x)+(T(\psi).f)(y,x)=T(T(\Phi).f)(x,y)+T(T(\psi).f)(x,y)=(\Phi of)(x,y)+(\psi of)(x,y)=(\Phi of+\psi of)(x,y)\implies(\Phi+\psi)of=\Phi of+\psi of$$

$$\big(\Phi o(f+g)\big)(x,y)=T\big(T(\Phi).(f+g)\big)(x,y)=\big(T(\Phi).(f+g)\big)(y,x)=\int_G^{\square}T(\Phi)(zy,x)(f+g)(z)dz=\int_G^{\square}\Phi(x,zy)(f+g)(z)dz=\int_G^{\square}\Phi(x,zy)f(z)dz+\int_G^{\square}\Phi(x,zy)g(z)dz=\int_G^{\square}T(\Phi)(zy,x)f(z)dz+\int_G^{\square}T(\Phi)(zy,x)g(z)dz=(T(\Phi).f)(y,x)+(T(\Phi).g)(y,x)=T(T(\Phi).f)(x,y)+T(T(\Phi).g)(x,y)=(\Phi of)(x,y)+(\Phi og)(x,y)=(\Phi of+\Phi og)(x,y)\Longrightarrow\Phi o(f+g)=\Phi of+\Phi og$$

$$\big(f o(go\Phi)\big)(x,y)=T\big(f.T(go\Phi)\big)(x,y)=\big(f.T(go\Phi)\big)(y,x)=$$
$$\int_G^{\square} T(go\Phi)(y,xz)f(z)dz=\int_G^{\square}(go\Phi)(xz,y)f(z)dz=$$
$$\int_G^{\square} T\big(g.T(\Phi)\big)(xz,y)f(z)dz=\int_G^{\square}\big(g.T(\Phi)\big)(y,xz)f(z)dz=$$
$$\int_G^{\square}\int_G^{\square} T(\Phi)(y,xzt)g(t)dtf(z)dz=\int_{G^2}^{\square} T(\Phi)(y,xzt)g(t)f(z)dtdz=$$
$$\int_{G^2}^{\square}\Phi(xzt,y)g(t)f(z)dtdz$$

$$((f*g)o\Phi)(x,y)=T((f*g).T(\Phi))(x,y)=((f*g).T(\Phi))(y,x)=$$
$$\int_G^{\square} T(\Phi)(y,xz)(f*g)(z)dz=\int_G^{\square}\Phi(xz,y)(f*g)(z)dz=$$
$$\int_G^{\square}\Phi(xz,y)\int_G^{\square} f(t)g(t^{-1}z)dt\,dz=\int_{G^2}^{\square}\Phi(xz,y)f(t)g(t^{-1}z)dtdz$$

$$((\Phi og)of)(x,y)=T(T(\Phi og).f)(x,y)=(T(\Phi og).f)(y,x)=$$
$$\int_G^{\square} T(\Phi og)(zy,x)f(z)dz=\int_G^{\square}(\Phi og)(x,zy)f(z)dz=$$
$$\int_G^{\square} T(T(\Phi).g)(x,zy)f(z)dz=\int_G^{\square}(T(\Phi).g)(zy,x)f(z)dz=$$
$$\int_G^{\square}\int_G^{\square} T(\Phi)(tzy,x)g(t)dtf(z)dz=$$
$$\int_{G^2}^{\square} T(\Phi)(tzy,x)g(t)f(z)dtdz=\int_{G^2}^{\square}\Phi(tzy,x)g(t)f(z)dtdz$$

$$(\Phi o(f*g))(x,y)=T(T(\Phi).(f*g))(x,y)=(T(\Phi).(f*g))(y,x)=$$
$$\int_G^{\square} T(\Phi)(zy,x)(f*g)(z)dz=\int_G^{\square}\Phi(x,zy)(f*g)(z)dz=$$
$$\int_G^{\square}\Phi(x,zy)\int_G^{\square} f(t)g(t^{-1}z)dt\,dz=\int_{G^2}^{\square}\Phi(x,zy)f(t)g(t^{-1}z)dtdz$$

$$\forall\Phi\in C_{\cdot}(G\times G,\frac{1}{\omega\times\omega})\quad (f.\Phi)og=f.(\Phi og)\quad (fo\Phi).g$$
$$=fo(\Phi.g)\quad f.(go\Phi)=go(f.\Phi)$$
$$((f.\Phi)og)(x,y)=T(T(f.\Phi)og)(x,y)=T(f.\Phi)og)(y,x)=$$
$$\int_G^{\square} T(f.\Phi)(zy,x)g(z)dz=\int_G^{\square}(f.\Phi)(x,zy)g(z)dz=$$
$$\int_G^{\square}\int_G^{\square}\Phi(x,zyz)f(z)dzg(z)dz=\int_{G^2}^{\square}\Phi(x,zyz)f(z)g(z)dz$$

$$(\boldsymbol{f}.(\boldsymbol{\Phi o g}))(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}(\boldsymbol{\Phi o g})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{yz})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi}).\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{yz})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=$$
$$\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi}).\boldsymbol{g})(\boldsymbol{yz},\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{zyz},\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dzf}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=$$
$$\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{zyz})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dzf}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}^{2}}^{\square}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{zyz})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}\implies$$
$$\big((\boldsymbol{f}.\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{o g}\big)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\big(\boldsymbol{f}.(\boldsymbol{\Phi o g})\big)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\implies(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{o g}=\boldsymbol{f}.(\boldsymbol{\Phi o g})$$
$$((\boldsymbol{f o\Phi}).\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}(\boldsymbol{f o\Phi})(\boldsymbol{zx},\boldsymbol{y})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{T}\big(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi})\big)(\boldsymbol{zx},\boldsymbol{y})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=$$
$$\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi}))(\boldsymbol{y},\boldsymbol{zx})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{zxz})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dzg}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=$$
$$\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{zxz},\boldsymbol{y})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dzg}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}^{2}}^{\square}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{zxz},\boldsymbol{y})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}$$

$$(\boldsymbol{f o}(\boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{g}))(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{g}))(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{g})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=$$
$$\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{g})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{xz})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}(\boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{g})(\boldsymbol{xz},\boldsymbol{y})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=$$
$$\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{zxz},\boldsymbol{y})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dzf}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}^{2}}^{\square}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{zxz},\boldsymbol{y})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}\implies$$
$$\big((\boldsymbol{f o\Phi}).\boldsymbol{g}\big)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\big(\boldsymbol{f o}(\boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{g})\big)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\implies(\boldsymbol{f o\Phi}).\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f o}(\boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{g})$$

$$(\boldsymbol{f}.(\boldsymbol{go\Phi}))(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}(\boldsymbol{go\Phi})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{yz})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{T}\big(\boldsymbol{g}.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi})\big)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{yz})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=$$
$$\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\big(\boldsymbol{g}.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi})\big)(\boldsymbol{yz},\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{yz},\boldsymbol{yx})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dzf}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=$$
$$\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{xz},\boldsymbol{yz})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dzf}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}^{2}}^{\square}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{xz},\boldsymbol{yz})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}$$

$$(\boldsymbol{go}(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{\Phi}))(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{g}.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{\Phi}))(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\big(\boldsymbol{g}.\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{\Phi})\big)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=$$
$$\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{xz})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{xz},\boldsymbol{y})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=$$
$$\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\int_{\boldsymbol{G}}^{\square}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{xz},\boldsymbol{yz})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dzg}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}=\int_{\boldsymbol{G}^{2}}^{\square}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{xz},\boldsymbol{yz})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}\implies$$
$$\big(\boldsymbol{f}.(\boldsymbol{go\Phi})\big)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\big(\boldsymbol{go}(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{\Phi})\big)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\implies\boldsymbol{f}.(\boldsymbol{go\Phi})=\boldsymbol{go}(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{\Phi})$$

دوگان عمل مدول از عمل ترکیب توابع در $\boldsymbol{M(G\times G,\omega\times\omega)}$

دو گان عمل مدول از $\boldsymbol{o}$ در $\boldsymbol{C_{\cdot}(G\times G,\frac{1}{\omega\times\omega})^{*}=M(G\times G,\omega\times\omega)}$ به دست می‌آید.

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{C_{\cdot}(G\times G,\frac{1}{\omega\times\omega})^{*}}\longrightarrow\boldsymbol{C_{\cdot}(G\times G,\frac{1}{\omega\times\omega})^{*}}\ \boldsymbol{T^{*}(\Phi)=\Phi o T}$$
$$\boldsymbol{fom=T^{*}\big(f.T^{*}(m)\big)}\quad\boldsymbol{mof=T^{*}(T^{*}(m).f)}\ \forall\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{L^{1}(G,\omega)}$$
$$\forall\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{M(G\times G,\omega\times\omega)}$$

$$T^*(f.T^*(m))(\Phi) = (f.T^*(m)oT)(\Phi) = (f.T^*(m))(T(\Phi))$$
$$= (f.(moT))(T(\Phi)) = (moT)(T(\Phi).f) = m(T(T(\Phi).f))$$
$$= m(\Phi of) = (fom)(\Phi) \ \ \forall \Phi \in C_{\cdot}(G \times G, \frac{1}{\omega \times \omega}) \Longrightarrow fom$$
$$= T^* \ (\mathrm{f} \ . T^* \ (\mathrm{m}))$$
$$T^*(T^*(m).f)(\Phi) = (T^*(m).foT)(\Phi) = (T^*(m).f)(T(\Phi))$$
$$= ((moT).f)(T(\Phi)) = (moT)(f.T(\Phi)) = m(T(f.T(\Phi)))$$
$$= m(fo\Phi) = (mof)(\Phi) \ \ \forall \Phi \in C_{\cdot}(G \times G, \frac{1}{\omega \times \omega}) \ \Longrightarrow \ mof$$
$$= T^*(T^*(m).f)$$
$$< f, h >= h(f)$$

فرمول های انتگرال برای دو مدول متفاوت عمل‌ها به دست می‌آیند :

$$(< \Phi, f.m >)(x,y) = \big((f.m)(\Phi)\big)(x,y) = \big(m(\Phi.f)\big)(x,y)$$
$$= (< \Phi.f, m >)(x,y) =$$
$$\int_{G^2}(\Phi.f)(x,y)dm(x,y) = \int_{G^2}\int_{G} \Phi(zx,y)f(z)dzdm(x,y) =$$
$$\int_{G^3} \Phi(zx,y)f(z)\,dz\,dm(x,y)$$
$$(< \Phi, m.f >)(x,y) = \big((m.f)(\Phi)\big)(x,y) = \big(m(f.\Phi)\big)(x,y)$$
$$= (< f.\Phi, m >)(x,y) =$$
$$\int_{G^2}(f.\Phi)(x,y)\,dm(x,y) = \int_{G^2}\int_{G} \Phi(x,yz)f(z)dzdm(x,y) =$$
$$\int_{G^3} \Phi(x,yz)f(z)\,dz\,dm(x,y)$$
$$(< \Phi, fom >)(x,y) = \big((fom)(\Phi)\big)(x,y) = \big(m(\Phi of)\big)(x,y)$$
$$= (< \Phi of, m >)(x,y) =$$
$$\int_{G^2}(\Phi of)(x,y)dm(x,y) = \int_{G^2} T(T(\Phi).f)(x,y)dm(x,y) =$$
$$\int_{G^2}(T(\Phi).f)(y,x)dm(x,y) = \int_{G^2}\int_{G} T(\Phi)(zy,x)f(z)dzdm(x,y) =$$
$$\int_{G^2}\int_{G} \Phi(x,zy)f(x)dzdm(x,y) = \int_{G^3} \Phi(x,zy)f(z)\,dz\,dm(x,y)$$
$$(< \Phi, mof >)(x,y) = \big((mof)(\Phi)\big)(x,y) = \big(m(fo\Phi)\big)(x,y)$$
$$= (< fo\Phi, m >)(x,y)$$
$$= \int_{G^2}(fo\Phi)(x,y)dm(x,y) = \int_{G^2} T(f.T(\Phi))(x,y)dm(x,y) =$$
$$\int_{G^2}\big(f.T(\Phi)\big)(y,x)dm(x,y) = \int_{G^2}\int_{G} T(\Phi)(y,xz)f(z)dzdm(x,y) =$$
$$\int_{G^2}\int_{G} \Phi(xz,y)f(z)dzdm(x,y) = \int_{G^2} \Phi(xz,y)f(z)\,dz\,dm(x,y)$$

$$< \Phi, f.m >=< \Phi.f, m >= \int_{G^2} \Phi(zx, y) f(z)\, dz\, dm(x, y)$$
$$< \Phi, m.f >=< f.\Phi, m >= \int_{G^2} \Phi(x, yz) f(z)\, dz\, dm(x, y)$$
$$< \Phi, fom >=< \Phi of, m >= \int_{G^2} \Phi(x, zy) f(z)\, dz\, dm(x, y)$$
$$< \Phi, mof >=< fo\Phi, m >= \int_{G^2} \Phi(xz, y) f(z)\, dz\, dm(x, y)$$

ما گروه G را یک شبه **SIN**-گروه می‌نامیم هرگاه $L^1(G)$ دارای یک تقریب همانی کران‌دار شبه-مرکز باشد به عبارتی اگر وجود داشته باشد یک تقریب همانی کران‌دار (e_α) برای $L^1(G)$ به طوری که

$$\|6_x e_\alpha - e_\alpha 6_x\| \to 0 \quad \forall x \in G$$

نمونه‌های بارز از شبه **SIN**-گروه‌ها ، گروه‌های **SIN** و گروه‌های میانگین‌پذیر هستند. منابع [۱۱] و [۱۲] را مشاهده نمایید. و علاوه بر این خصوصیات از شبه **SIN**-گروه‌ها را می‌توان در [۱۵] مشاهده نمود.

لم ۴-۱ : فرض کنید که G یک شبه **SIN**-گروه فشرده‌ی موضعی و ω یک وزن بر G باشد که $\omega(e) = 1$ در این صورت $L^1(G, \omega)$ دارای یک تقریب همانی کران‌دار شبه-مرکزی است به طوری که

$$\lim_{\alpha}(e_\alpha.m.e_\alpha - e_\alpha omoe_\alpha) = 0 \quad \forall m \in M(G \times G, \omega \times \omega) \qquad (۴-۱)$$

برهان : اگر G یک شبه SIN-گروه باشد بنابر [**۱۵ قضیه‌ی ۶.۲**] ، $L^1(G)$ دارای یک تقریب همانی کران‌دار شبه مرکزی مانند (e_α) است که

$$\|6_x e_\alpha - e_\alpha 6_x\|_1 \to 0$$

حد یکنواخت برای x در زیر مجموعه های فشرده‌ی G به دست می‌آید و

$$Supp(e_\alpha) \to \{e\}$$
$$Supp(e_\alpha) = \{b \;\; e_\alpha(b) \neq 0\}$$
$$Supp(e_\alpha) = E \;\; s.t \;\; e_\alpha(E^C) = 0 \;\; \forall U \;\; e_\alpha(E \cap U) = 0 \implies E \cap U = \emptyset$$

از این که $\omega(e) = 1$ تور (e_α) یک تقریب همانی کران دار برای $L^1(G, \omega)$ است.

$\|6_x e_\alpha - e_\alpha 6_x\|_\omega \to 0$ به طور یکنواخت برای x در مجموعه های فشرده از G. فرض کنید که $\|e_\alpha\|_\omega \leq c$ برای هر α از این که

اندازه‌های بورل با تکیه گاه فشرده در $M(G \times G, \omega \times \omega)$

چگال هستند در مرحله ثابت کردن اثبات این قضیه کافی است نشان دهیم (۱-۴) برای هر $\boldsymbol{m}$ با تکیه گاه فشرده بر قرار است. فرض کنید که $\boldsymbol{K = supp(m)}$ فشرده باشد. زیر گروه $\boldsymbol{H}$ از $\boldsymbol{G}$ را طوری که $\boldsymbol{K}$ زیر مجموعه‌ی $\boldsymbol{H^{\circ}}$ باشد به دست می‌آوریم. در این صورت تور $\boldsymbol{(m_i)}$ در $\boldsymbol{L^{1}(G \times G, \omega \times \omega)}$

وجود دارد به طوری که $\boldsymbol{supp(m_i)}$ زیر مجموعه‌ی $\boldsymbol{H}$ باشد

$\|\boldsymbol{m_i}\|_{\omega\times\omega} \leq \|\boldsymbol{m}\|_{\omega\times\omega}$ و

و $\lim_i(m_i) = m$ در توپولوژی ضعیف*. برای هر نقطه‌ی انبوه (انباشتگی) مانند

$6_{(x,y)} \in L^{1}(G \times G, \omega \times \omega)$

$\forall \varepsilon > \cdot \; \forall \lambda \in M(G \times G, \omega \times \omega) \; \exists \theta \in B(\mathfrak{m}) \; s.t \quad supp\theta = K$;

$\forall U \quad \theta(K \cap U) = \cdot \implies K \cap U = \emptyset$;

$|\omega \times \omega|\lambda| - \theta|(G) < \varepsilon \;\; i.e$

$|\omega \times \omega|\lambda| - \theta| \to \cdot$

$f.6_{(x,y)} - 6_{(x,y)}of = (f.6_x - 6_x.f)\otimes 6_y$

$(f.6_{(x,y)} - 6_{(x,y)}of)(\Phi(s,t)) = \int_{G^{2}}^{\square} \Phi(zs,t)f(z)dzd6_{(x,y)}(s,t) -$
$\int_{G^{2}}^{\square} \Phi(sz,t)f(z)dzd6_{(x,y)}(s,t) = \int_{G^{2}}^{\square}[\Phi(zs,t) - \Phi(sz,t)]f(z)dzd6_{(x,y)}(s,t) =$
$\int_{G}^{\square}[\Phi(zx,y) - \Phi(xz,y)]f(z)dz$

$$((f.6_x - 6_x.f)\otimes 6_y)(\Phi(s,t)) = \int_{G^{2}}^{\square} \Phi(s,t)d((f.6_x - 6_x.f)\otimes 6_y)(s,t) =$$
$$\int_{G^{2}}^{\square} \Phi(s,t)d(f.6_x - 6_x.f)(s)d6_y(t) = \int_{G}^{\square} \Phi(s,y)d(f.6_x - 6_x.f)(s) =$$
$$\int_{G}^{\square} \Phi(s,y)(f(sx^{-1}) - f(x^{-1}s))\,ds = \int_{G}^{\square} \Phi(s,y)f(s^{-1}x)\,ds -$$
$$\int_{G}^{\square} \Phi(s,y)f(x^{-1}s)\,ds = \int_{G}^{\square} \Phi(sx,y)f(sxx^{-1})\,ds - \int_{G}^{\square} \Phi(xs,y)f(x^{-1}xs)\,ds =$$
$$\int_{G}^{\square} \Phi(sx,y)f(s)\,ds - \int_{G}^{\square} \Phi(xs,y)f(s)\,ds = \int_{G}^{\square}[\Phi(sx,y) - \Phi(xs,y)]f(s)ds =$$
$$\int_{G}^{\square}[\Phi(zx,y) - \Phi(xz,y)]f(z)dz$$

$fo6_{(x,y)} - 6_{(x,y)}of = 6_x\otimes(f.6_y - 6_y.f)$

$$(fo6_{(x,y)} - 6_{(x,y)}of)(\Phi(s,t) = \int_{G^2}^{\square} \Phi(s,zt)f(z)dzd6_{(x,y)}(s,t) -$$
$$\int_{G^2}^{\square} \Phi(s,tz)f(z)dzd6_{(x,y)}(s,t) = \int_{G^2}^{\square} [\Phi(s,zt) - \Phi(s,tz)]f(z)dzd6_{(x,y)}(s,t) =$$
$$\int_{G}^{\square} [\Phi(x,zy) - \Phi(x,yz)]f(z)dz$$

$$(6_x \otimes (\boldsymbol{f}.6_y - 6_y.\boldsymbol{f}))(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})) = \int_{G^2}^{\square} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\boldsymbol{d}(6_x \otimes (\boldsymbol{f}.6_y - 6_y.\boldsymbol{f}))(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) =$$
$$\int_{G^2}^{\square} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\boldsymbol{d}6_x(\boldsymbol{s})\boldsymbol{d}(\boldsymbol{f}.6_y - 6_y.\boldsymbol{f}))(\boldsymbol{t}) = \int_{G}^{\square} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\boldsymbol{d}(\boldsymbol{f}.6_y - 6_y.\boldsymbol{f}))(\boldsymbol{t}) =$$
$$\int_{G}^{\square} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{ty}^{-1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{t}))\boldsymbol{dt} = \int_{G}^{\square} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{ty}^{-1})\boldsymbol{dt} -$$
$$\int_{G}^{\square} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} = \int_{G}^{\square} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{ty})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{tyy}^{-1})\boldsymbol{dt} - \int_{G}^{\square} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{yt})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{yt})\boldsymbol{dt} =$$
$$\int_{G}^{\square} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{ty})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} - \int_{G}^{\square} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{yt})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} = \int_{G}^{\square} [\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{ty}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{yt})]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} =$$
$$\int_{G}^{\square} [\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{zy}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{yz})]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{dz}$$

$$\forall \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{G},\boldsymbol{\omega})\ \forall \boldsymbol{\Phi} \in \boldsymbol{C}_.(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G},\tfrac{1}{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}}) \qquad \|\boldsymbol{\Phi}\| \le 1$$
$$|< \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{e_\alpha}.\boldsymbol{m}.\boldsymbol{e_\alpha} - \boldsymbol{e_\alpha}\boldsymbol{omoe_\alpha} >| \le \big|\ < \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{e_\alpha}.(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m_i}).\boldsymbol{e_\alpha} >\big| +$$
$$|< \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{e_\alpha}\boldsymbol{o}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m_i})\boldsymbol{oe_\alpha} >| + \|(\boldsymbol{e_\alpha}.\boldsymbol{m_i} - \boldsymbol{m_i}\boldsymbol{oe_\alpha}).\boldsymbol{e_\alpha}\| + \|(\boldsymbol{e_\alpha}\boldsymbol{om_i} -$$
$$\boldsymbol{m_i}.\boldsymbol{e_\alpha})\boldsymbol{oe_\alpha}\| \le |< \boldsymbol{e_\alpha}.\boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{e_\alpha}, (\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m_i}) >| + \big|\ < \boldsymbol{e_\alpha}\boldsymbol{o\Phi}\ \boldsymbol{oe_\alpha}, (\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m_i}) > \big| +$$
$$\boldsymbol{c}\|\boldsymbol{m}\| \sup_{(x,y)\in H} \left(\|6_x\boldsymbol{e_\alpha} - \boldsymbol{e_\alpha}6_x\|_\omega \big\|6_y\big\|_\omega\right) + \boldsymbol{c}\|\boldsymbol{m}\| \sup_{(x,y)\in H} (\|6_x\|_\omega \big\|6_y\boldsymbol{e_\alpha} -$$
$$\boldsymbol{e_\alpha}6_y\big\|_\omega)$$

از این که $\lim_i \boldsymbol{m_i} = \boldsymbol{m}$ در توپولوژی ضعیف*.

$$|< \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{e_\alpha}.\boldsymbol{m}.\boldsymbol{e_\alpha} - \boldsymbol{e_\alpha}\boldsymbol{omoe_\alpha} >| \le \boldsymbol{c}\|\boldsymbol{m}\| \sup_{(x,y)\in H} \left(\|6_x\boldsymbol{e_\alpha} - \boldsymbol{e_\alpha}6_x\|_\omega \big\|6_y\big\|_\omega\right) +$$
$$\boldsymbol{c}\|\boldsymbol{m}\| \sup_{(x,y)\in H} \left(\|6_x\|_\omega \big\|6_y\boldsymbol{e_\alpha} - \boldsymbol{e_\alpha}6_y\big\|_\omega\right) \qquad \forall \boldsymbol{\Phi} \in \boldsymbol{C}_.(\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}, \boldsymbol{\omega}^{-1}\times\boldsymbol{\omega}^{-1})$$
$$\|\boldsymbol{\Phi}\| \le 1 \implies \|\boldsymbol{e_\alpha}.\boldsymbol{m}.\boldsymbol{e_\alpha} - \boldsymbol{e_\alpha}\boldsymbol{omoe_\alpha}\|_{\omega\times\omega} \le \boldsymbol{c}\|\boldsymbol{m}\| \sup_{(x,y)\in H} (\|6_x\boldsymbol{e_\alpha} -$$
$$\boldsymbol{e_\alpha}6_x\|_\omega \big\|6_y\big\|_\omega) + \boldsymbol{c}\|\boldsymbol{m}\| \sup_{(x,y)\in H} (\|6_x\|_\omega \big\|6_y\boldsymbol{e_\alpha} - \boldsymbol{e_\alpha}6_y\big\|_\omega)$$

اکنون (۴-۱) به وسیله‌ی نافشرده بودن $\boldsymbol{H}$ و شرایط $(\boldsymbol{e_\alpha})$ به دست می‌آید.

گزاره‌ی ۴-۲ : فرض کنید که $\boldsymbol{G}$ یک شبه **SIN**-گروه فشرده‌ی موضعی باشد و $\boldsymbol{\omega}$ یک وزن بر $\boldsymbol{G}$ باشد به طوری که $\boldsymbol{\omega(e)=1}$ و $\lim_{x\to\infty}\boldsymbol{\omega(x)\omega(x^{-1})}=\infty$ اگر $\mathbf{L^1(G,\omega)}$ میانگین پذیر تقریبی کران‌دار باشد. آن‌گاه انقباض پذیر تقریبی کران‌دار می‌باشد.

برهان : ریخت $\boldsymbol{L^1(G,\omega)}$-دو مدول $\tilde{\pi}$ را به شکل زیر تعریف می‌نماییم :

$$\tilde{\pi}: \boldsymbol{M(G\times G,\omega\times\omega)\longrightarrow M(G,\omega)} \quad <\boldsymbol{\Phi},\tilde{\pi}(\boldsymbol{u})>=\int_{G^2}\boldsymbol{\Phi(x,y)\,du(x,y)}$$

$$\forall\boldsymbol{\Phi}\in\boldsymbol{C_0(G,\frac{1}{\omega})}\ \ \boldsymbol{i.e}\ \ \boldsymbol{\frac{1}{\omega}\Phi\in C_0(G)}\ \ \forall\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{M(G\times G,\omega\times\omega)}$$

از این که $\lim_{x\to\infty}\boldsymbol{\omega(x)\omega(x^{-1})}=\infty$ از [**۷ لم ۳.۸**] داریم که $\tilde{\pi}$ یک ضعیف * پیوسته است و توسیع این نگاشت است،

$$\pi: \boldsymbol{L^1(G\times G,\omega\times\omega)\longrightarrow L^1(G,\omega)}$$

لذا $\boldsymbol{Ker}(\tilde{\pi})$ دوگان باناخ $\boldsymbol{L^1(G,\omega)}$-دو مدول است. بنابر این مشتق پیوسته‌ی $\boldsymbol{D:L^1(G,\omega)\longrightarrow Ker}(\tilde{\pi})$ تعریف می‌شود پس به وسیله‌ی $\boldsymbol{D(f)=f.6_{(e,e)}-6_{(e,e)}.f}$

$$\boldsymbol{D:L^1(G,\omega)\longrightarrow Ker}(\tilde{\pi})\ \boldsymbol{s.t}\quad \boldsymbol{D(f)=f.6_{(e,e)}-6_{(e,e)}.f}$$
$$\forall\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{L^1(G,\omega)}$$
$$\boldsymbol{Ker}(\tilde{\pi})=\{\boldsymbol{U}\ ;\ \tilde{\pi}(\boldsymbol{U})=0\}=\{\boldsymbol{U}\ ;\ \forall\boldsymbol{\Phi}\in\boldsymbol{C_0(G,\frac{1}{\omega})}\ \ (\tilde{\pi}(\boldsymbol{U}))(\boldsymbol{\Phi})=$$
$$\int_{G^2}\boldsymbol{\Phi(xy)\,du(x,y)}=0\}$$

$$\tilde{\pi}\big(\boldsymbol{D(f)}\big)(\boldsymbol{\Phi})=\int_{G^2}\boldsymbol{\Phi(xy)D(f)(x,y)}=\int_{G^2}\boldsymbol{\Phi(xy)}\big(\boldsymbol{f.6_{(e,e)}-6_{(e,e)}.f}\big)\boldsymbol{(x,y)}=$$
$$\int_{G^3}\boldsymbol{\Phi(zxy)f(z)dzd6_{(e,e)}(x,y)}-\int_{G^3}\boldsymbol{\Phi(xyz)f(z)dzd6_{(e,e)}(x,y)}=$$
$$\int_{G}\boldsymbol{\Phi(zee)f(z)dz}-\int_{G}\boldsymbol{\Phi(eez)f(z)dz}=0\implies\boldsymbol{D(f)}\in\boldsymbol{Ker}(\tilde{\pi})$$
$$\exists\boldsymbol{m}>0\ \ \boldsymbol{s.t}\ \ \|\boldsymbol{U_i}\|=\sup_{\|\boldsymbol{f}\|\le1}|\boldsymbol{fu_i-u_if}|<\boldsymbol{m}$$

از این که $\boldsymbol{L^1(G,\omega)}$ میانگین پذیر تقریبی کران‌دار است. $\boldsymbol{D}$ یک تقریب درونی کران‌دار است. مطمئن هستیم که تور $(\boldsymbol{u_i})$ از عناصر $\boldsymbol{M(G\times G,\omega\times\omega)}$ و ثابت $\boldsymbol{C>0}$ وجود دارند به طوری که

$$\tilde{\pi}(\boldsymbol{u_i})=6_e,\ \ \|\boldsymbol{fu_i-u_if}\|\le\boldsymbol{C}\|\boldsymbol{f}\|\ ;\ \|\boldsymbol{fu_i-u_if}\|\to0\quad\forall\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{L^1(G,\omega)}$$
$$\boldsymbol{f.6_{(e,e)}-6_{(e,e)}.f=D(f)=\lim_i fu_i-u_if}\implies\boldsymbol{f.6_{(e,e)}-6_{(e,e)}.f}=$$
$$\boldsymbol{\lim_i fu_i-u_if}$$

$$\boldsymbol{U_{(i,\alpha)} = e_\alpha . u_i . e_\alpha}\ ,\ \pi(\boldsymbol{U_{(i,\alpha)}}) = \boldsymbol{e_\alpha * e_\alpha}\ \ \forall \boldsymbol{i}\ \boldsymbol{U_{(i,\alpha)}} \in \boldsymbol{L^1(G \times G, \omega \times \omega)}$$

بنا بر لم ۴-۱ $\boldsymbol{\lim_{\alpha}(e_\alpha . u_i . e_\alpha - e_\alpha o u_i o e_\alpha) = 0}$ (۴-۲)

ما می‌توانیم $\boldsymbol{\alpha(i)}$ را انتخاب کنیم به طوری که

$$\boldsymbol{\|e_\alpha . u_i . e_\alpha - e_\alpha o u_i o e_\alpha\| \le 1\ \ \forall \alpha \ge \alpha(i)}\ .$$

اگر $\boldsymbol{f \in L^1(G, \omega)}$ آن‌گاه

$$\boldsymbol{f . U_{(i,\alpha)} - U_{(i,\alpha)} . f = f . (e_\alpha . u_i . e_\alpha - e_\alpha o u_i o e_\alpha) - (e_\alpha . u_i . e_\alpha - e_\alpha o u_i o e_\alpha) . f + f . (e_\alpha o u_i o e_\alpha) - (e_\alpha . u_i . e_\alpha) . f}$$

(۴-۳)

بنابر قانون جا به جایی

$$\boldsymbol{f . (e_\alpha o u_i o e_\alpha) = e_\alpha o (f . u_i) o e_\alpha \quad ; \quad (e_\alpha o u_i o e_\alpha) . f = e_\alpha o (u_i . f) o e_\alpha}$$
$$\boldsymbol{\Longrightarrow \|f U_{(i,\alpha)} - U_{(i,\alpha)} f\| = \|f . (e_\alpha . u_i . e_\alpha - e_\alpha o u_i o e_\alpha) - (e_\alpha . u_i . e_\alpha - e_\alpha o u_i o e_\alpha) . f + f . (e_\alpha o u_i o e_\alpha) - (e_\alpha . u_i . e_\alpha) . f\| = \|f . (e_\alpha . u_i . e_\alpha - e_\alpha o u_i o e_\alpha)\| + \|-(e_\alpha . u_i . e_\alpha - e_\alpha o u_i o e_\alpha) . f\| + \|f . (e_\alpha o u_i o e_\alpha) - (e_\alpha . u_i . e_\alpha) . f\| \le \|f\|_\omega + \|f\|_\omega + \|f . (e_\alpha o u_i o e_\alpha) - (e_\alpha . u_i . e_\alpha) . f\| \le (2 + c^2 C)\|f\|}$$

(۴-۳)

$$\boldsymbol{\forall f \in L^1(G, \omega)\ \ \forall \alpha \ge \alpha(i)\ \|e_\alpha\| \le c}$$

با کنار هم قرار دادن (۲-۴) و (۳-۴) و (۴-۴) نشان داده می‌شود که زیر تور $\boldsymbol{(U_j)}$ از $\boldsymbol{(U_{(i,\alpha)})}$ وجود دارد به طوری که $\boldsymbol{(U_j)}$ قطر تقریبی ضربگر-کران‌دار است برای $\boldsymbol{L^1(G, \omega)}$ و $\boldsymbol{(\pi(u_j))}$ یک تقریب همانی کران‌دار برای $\boldsymbol{L^1(G, \omega)}$ است. پس $\boldsymbol{L^1(G, \omega)}$ بنابر گزاره‌ی ۳-۱ (برهان ۳=>۱) انقباض پذیر تقریبی کران‌دار است.

فهرست منابع

Refrences

[۱] O. Y. Aristov, V. Runde and N. SPRONK, 'Operator biflatness of the Fourier algebra and approximate indicators for subgroups', J.Funct. Anal. ۲۰۹ (۲۰۰٤), ۳٦۷-۳۸۷.

[۲] Y. Choi, F. Ghahramani and Y. Zhang, 'Approximate and pseudo-amenability of various classes of Banach algebra' , J.Funct. Anal. ۲٥٦ (۲۰۰۹), ۳۱٥۸-۳۱۹۱.

[۳] H. G. Dales, F. Ghahramani and N. Grϕnbæk, 'Derivations into iterated dual of Banach algebras', Studia Math. ۱۲۸ (۱۹۹۸), ۱۹-٥٤.

[٤] H. G. Dales and A. T. M. Lau, 'The second duals of Beurling algebras' , Mem. Amer. Math. Soc. ۱۷۷(۸۳٦) (۲۰۰٥).

[٥] F. Ghahramani and A. T. Lau, 'Isometric isomorphisms between the second conjugate algebras of group algebras' ,Bull. Lond. Math. Soc. ۲۰ (۱۹۹۸), ۳٤۲-۳٤٤

[٦] F. Ghahramani and R. J. Loy, 'Generalized notions of amenability ', J.Funct. Anal. ۲۰۸ (۲۰۰۴), ۲۲۹-۲٦۰.

[۷] F. Ghahramani, R. J. Loy and Y. Zhang, ' 'Generalized notions of amenability, II ', J.Funct. Anal. ۲٥٤ (۲۰۰۸), ۱۷۷٦-۱۸۱۰.

[۸] F. Ghahramani and G. Zabandan, '۲-Weak amenability of a Beurling algebra and amenability of its second dual' , Int. J. Pure Appl. Math. ۱٦ (۲۰۰٤) , ۷٥-۸٦.

[۹] F. Ghahramani and Y. Zhang, 'Pseudo-amenable and pseudo –contractible Banach algebras' , Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. ۱٤۲ (۲۰۰۷), ۱۱۱-۱۲۳.

[۱۰] N. GrØnbæk, ' Amenability of weighted convolution algebras on locally compact groups', Trans. Ame r. Math . Soc. ۳۱۹ (۱۹۹۰), ۷٦٥-۷۷٥.

[۱۱] V. Losert and H. Rindler, 'Asymptotically central functions and invariant extensions of Dirac measure', in: Probability Measures on Groups VII, Lecture Notes in Mathematics, ۱۰٦٤ (ed. H.Heyer) (Springer, Berlin, ۱۹۸٤), pp. ۳٦۸-۳۷۸.

[۱۲] R. Mosak, 'Central functions in group algebras', Proc. Ame r. Math . Soc. ۲۹ (۱۹۷۱), ٦۱۳-٦۱۹.

[۱۳] T. W. Palmer, Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras I,II (Cambridge University Press, Cambridge, ۱۹۹٤, ۲۰۰۱).

[۱٤] E. Samei, 'Weak amenability and ۲-weak amenability if Beurling algebras', J. Math. Anal. Appl. ۳٤٦ (۲۰۰۸), ٤٥۱-٤٦۷.

[۱٥] R. Stokke, 'Quasi-central bounded approximate identities in group algebras of locally compact groups' ,Illinois J. Math. ٤۸ (۲۰۰٤), ۱٥۱-۱۷۰.
[۱٦] M. C. White, ' Characters on weighted amenable groups ' , Bull. Lond. Math. Soc. ۲۳ (۱۹۹۱), ۳۷٥-۳۸۰.

[۱۷] Y. Zhang, 'Solved and unsolved problems in generalized notions of amenability for Banach algebras', in: Banach algebras ۲۰۰۹ , Banach Centre Publications, ۹۱ (eds. R. J. Loy, A. Soltysiak and V. Rundle) (Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warsaw, ۲۰۱۰), pp. ٤٤۱-٤٥٤.

[۱۸] W. Rudin 'Principles of Mathematical Analysis' , McGraw-Hill , New Yark , ۱۹۷٦

[۱۹] W. Rudin 'Real and Complex Analysis' ,ed,c۱۹۸۷

[۲۰] I.N.Herstein 'Topics in Algebra'

[۲۱] J. Duncan and S. A. R. Hosseiniun 'The second dual of a Banach algebra*' Proceedings of [he Royal Society of Edinburgh, ۸٤A, ۳۰۹-۳۲٥, ۱۹۷۹

[۲۲] A course in commutative Banach algebras-Kaniuth

واژه‌نامه‌ی فارسی– انگلیسی

۱ .ساختارهای جبری

حلقه —ring

میدان —field

فضای برداری —vector space

همریختی —homomorphism

---

۲ .ویژگی‌ها و خواص جبری

میانگین پذیری —amenability

انقباض‌پذیری —contractibility

شبه مرکزی —quasi central

---

۳ .خواص و ویژگی‌های ریاضی

مشتق‌پذیر —derivative

پیوسته —continuous

کران‌دار —bounded

فشرده —compact

---

۴ .تقریب‌ها و سازه‌های مرتبط

تقریب درونی —inner approximate

تقریب همانی —identity approximate

متقارن ساز —symmetrical construction

---

۵ .توپولوژی و اندازه‌گیری

توپولوژی —topology

بعد —dimension

اندازه —measure

وزن —weight